

Przemysław Korohoda *

Dyskusja możliwości dostosowania opisu algorytmów filtracji adaptacyjnej do wybranej dyskretnej transformacji**

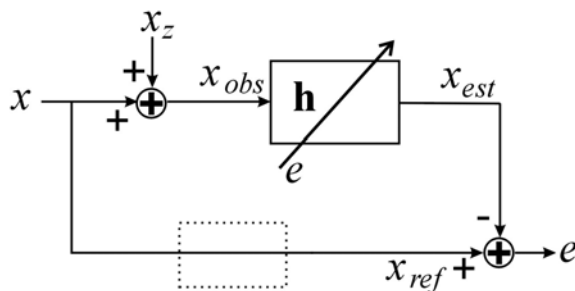
1. Wprowadzenie

Filtracja adaptacyjna stanowi obecnie jeden z kanonów w obszarze cyfrowego przetwarzania sygnałów [2, 8, 9]. Na rysunku 1 przedstawiono podstawowy schemat takiej filtracji [2]. Sygnał wejściowy (x) jest sumowany z sygnałem umownie nazywanym zakłóceniem (x_z), a sygnał wynikowy (x_{obs}) jest poddawany filtracji filtrem o odpowiedzi impulsowej h . Adaptacja polega na modyfikacji współczynników filtru cyfrowego w taki sposób, by minimalizacji ulegał błąd (e), czyli wynik porównania wyniku filtracji (x_{est}) i sygnału referencyjnego (x_{ref}). W praktyce sygnał referencyjny może różnić się od sygnału wejściowego x amplitudą, opóźnieniem, a niekiedy wpływem toru transmisyjnego. Ponieważ celem prac opisanych w artykule było wstępne zbadanie możliwości adaptacyjnych proponowanych algorytmów filtracji, przyjęto iż sygnał referencyjny jest identyczny z sygnałem wejściowym. Dlatego też na schemacie z rysunku 1 możliwość zaistnienia różnic między tymi sygnałami przedstawiono jedynie w postaci bloku zaznaczonego linią przerywaną. W artykule rozważany jest przypadek filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej, tzw. filtrów typu FIR (*Finite Impulse Response*). W ogólnym przypadku odpowiedź impulsowa może być także nieskończona, wtedy jednak stosuje się podejście dostosowane do takich filtrów (tzw. filtrów typu IIR – (*Infinite Impulse Response*)). Współczynniki filtru FIR, czyli jego odpowiedź impulsowa, są zmieniane na bieżąco w trakcie pracy systemu. Podział na sygnał użyteczny i zakłócenie jest umowny. Często rola obu sygnałów jest z punktu widzenia użytkownika odwrotna. Przykładowo, gdy celem filtracji jest eliminacja np. pochodzących z dowolnego źródła silnych niskoczęstotliwościowych zakłóceń elektromagnetycznych, wpływających na pracę umieszczonego w pobliżu odbiornika radiowego, wtedy regularny okresowy sygnał zakłócenia pełni z punktu widzenia schematu z rysunku 1

* Katedra Elektroniki, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

** Praca zrealizowana w ramach badań własnych AGH w roku 2005, nr 10.10.120.311

rolę sygnału wejściowego. Błąd porównania e jest w takim przypadku wykorzystywany jako sygnał radiowy, o względnie szerokim paśmie, zawierający zredukowaną dzięki filtracji i operacji odejmowania zawartość okresowego zakłócenia. Umieszczenie w pobliżu źródła zakłócenia sondy umożliwia pobranie sygnału referencyjnego, a filtr adaptacyjny ma za zadanie dostrajać się do zmieniającej się częstotliwości zakłócenia oraz zmian położenia odbiornika radiowego względem źródła zakłócenia. Teoria filtrów adaptacyjnych jest obecnie dobrze rozwinięta, jednak podstawową cechą realizujących je układów jest wykorzystanie filtrów realizujących operację splatania, charakterystyczną dla interpretacji wynikającej z transformacji Fouriera. W chwili obecnej, w wyniku powszechnego stosowania systemów cyfrowych, coraz częściej w opisie sygnałów i ich przetwarzaniu istotną rolę odgrywają transformacje dyskretne inne niż transformacja Fouriera. W cyklu prac [3, 4, 5, 6, 7] przedstawiono podstawy teorii oraz możliwe kierunki rozwoju koncepcji uogólnionego splotu kołowego. Uogólnienie polega na wyznaczeniu zależności pomiędzy ciągiem wejściowym i ciągiem wynikającym z filtracji, gdy filtracja jest realizowana przez mnożenie transformaty sygnału wejściowego przez transformatę założonego filtra dla dowolnej ortogonalnej transformacji cyfrowej. Istnienie opisu takiej filtracji w dziedzinie pierwotnej stworzyło możliwość stworzenia opisu filtracji adaptacyjnej dla interpretacji innej niż interpretacja częstotliwościowa według Fouriera. W artykule przedstawiono, w jaki sposób, wychodząc od założeń analogicznych do typowych algorytmów filtracji adaptacyjnych i stosując odpowiednie podstawienia wynikające z teorii kołowego splotu uogólnionego, można wyprowadzić algorytmy realizujące systemy adaptacyjne dostosowane w zapisie bezpośrednio do dowolnych dyskretnych transformacji ortogonalnych. Wyprowadzone zależności teoretyczne zostały wsparte przykładowymi obliczeniami dla transformacji: Haara, Hadamarda, Hartleya oraz kosinusowej typu 3 (*DCT-III*) [1].



Rys. 1. Ogólny schemat blokowy filtracji adaptacyjnej

Opis w tekście

2. Uogólnienie splotu kołowego

W cyklu prac [3, 4, 5, 6, 7] zaproponowano, a następnie rozwinięto, koncepcję opisu w dziedzinie pierwotnej filtracji realizowanej poprzez mnożenie transformat sygnału i filtra dla dowolnej dyskretnej transformacji.

Zapisując w postaci wektorowej ciąg dyskretnego sygnału wejściowego jako \mathbf{x} oraz jako \mathbf{h} wektor odwrotnej transformaty filtru zdefiniowanego w dziedzinie transformaty, wynik filtracji, \mathbf{y} , można opisać zależnością

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{W}_n \cdot \mathbf{x} \quad (1)$$

gdzie kwadratowe nawiasy wskazują, iż chodzi o określoną indeksem n współrzędną wektora, natomiast macierz kwadratowa \mathbf{W}_n jest zależna od rozważanej transformaty [7] i indeksu n . W dalszych rozważaniach, w celu dostosowania do zapisu (1), ciąg próbek sygnału będzie dzielony na bloki o jednakowych długościach, a bloki te będą traktowane jak wektory.

3. Filtr adaptacyjny Widrowa–Hoffa

Zgodnie ze schematem z rysunku 1 i przyjętym podziałem na bloki, sygnał błędu może być zapisany dla danego bloku w postaci wektorowej

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{est} \quad (2)$$

Na podstawie (1) i (2) kolejne elementy wektora błędu można zatem zapisać jako

$$\mathbf{e}[n] = \mathbf{x}[n] - \mathbf{h}^T(n) \cdot \mathbf{W}_n \cdot \mathbf{x}_{obs}(n) \quad (3)$$

Jeżeli przyjmiemy jako wskaźnik dla kryterium optymalizacji danego filtru wartość parametru

$$Q_n = (\mathbf{e}[n])^2 \quad (4)$$

to ujemna wartość gradientu dla tego wskaźnika, wyznaczonego względem zmian współczynników filtru, wyrazi się wzorem

$$-\frac{\partial Q_n}{\partial \mathbf{h}} = 2 \cdot \mathbf{W}_n \cdot \mathbf{x}_{obs}(n) \cdot \mathbf{e}[n] \quad (5)$$

Indeks n w nawiasie okrągłym przy wektorze oznacza, iż jest to stan danego wektora w n -tym kroku algorytmu. Zgodnie z regułą podążania w kierunku ujemnej wartości gradientu wskaźnika (4) można zatem wyznaczyć przepis na modyfikację współczynników filtru, bazując na algorytmie Widrowa–Hoffa

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \delta \cdot \mathbf{W}_n \cdot \mathbf{x}_{obs}(n) \cdot \mathbf{e}[n] \quad (6)$$

W wielu przypadkach zbieżność obliczeń ulega poprawie, gdy współczynnik δ ulega stopniowemu zmniejszaniu, na przykład poprzez zastosowanie współczynnika $\alpha < 1$

$$\delta_{n+1} = \alpha \cdot \delta_n \quad (7)$$

Ponieważ sygnał dzielony jest na bloki o długości N , algorytm opisany zależnością (6) musi być do tego podejścia odpowiednio dostosowany. Adaptacja realizowana jest w cyklach odpowiadających kolejnym blokom. Na początku w ramach danego bloku wyznacza się wartość pierwszego elementu wektora błędu \mathbf{e} , dla $n = 0$, po czym następuje zmiana współczynników filtra i ponowne wyznaczenie wszystkich wektorów według schematu z rysunku 1. Indeks n jest zwiększany o 1 i ponownie korygowany jest cały wektor \mathbf{h} . Procedura ta jest realizowana do chwili osiągnięcia ostatniego indeksu w bloku, czyli gdy $n = N - 1$. Zatem w każdym bloku sygnału procedura adaptacyjna stopniowo N -krotnie zmienia wartość wektora \mathbf{h} . Na końcu każdego cyklu otrzymuje się filtr zaadaptowany do sygnału w tym właśnie bloku.

4. Filtr adaptacyjny Wienera

Dla otrzymania pełniejszego obrazu proponowanego podejścia wyprowadzony został również odpowiedni wzór realizujący filtrację Wienera w wersji optymalnej. Podstawowym założeniem tego rozwiązania jest globalna, a nie stopniowa, jak to się dzieje w przypadku filtra Widrowa–Hoffa, minimalizacja błędu poprzez minimalizację następującego wskaźnika

$$J = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{e}[n])^2 \quad (8)$$

Realizacja warunku zerowania pochodnych cząstkowych tego wskaźnika po wszystkich współczynnikach filtra

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{0} \quad (9)$$

prowadzi przy wykorzystaniu (1) do następującego rozwiązania

$$\mathbf{h} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (10)$$

gdzie

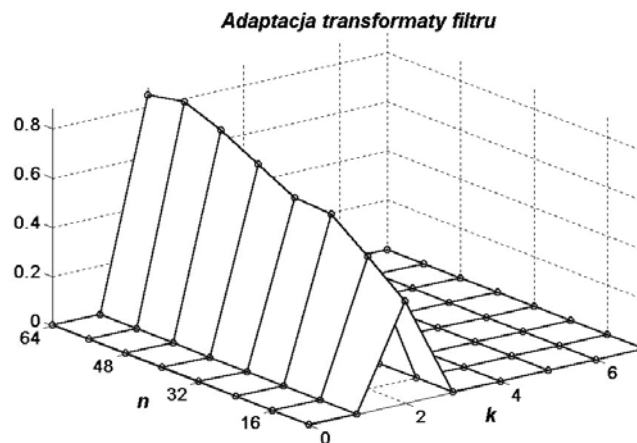
$$\mathbf{b} = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{W}_n \cdot \mathbf{x}_{obs}) \cdot \mathbf{x}[n] \quad (11)$$

natomiast

$$\mathbf{B} = \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{W}_n \cdot \mathbf{x}_{obs}) \cdot (\mathbf{W}_n \cdot \mathbf{x}_{obs})^T \quad (12)$$

5. Wyniki symulacji

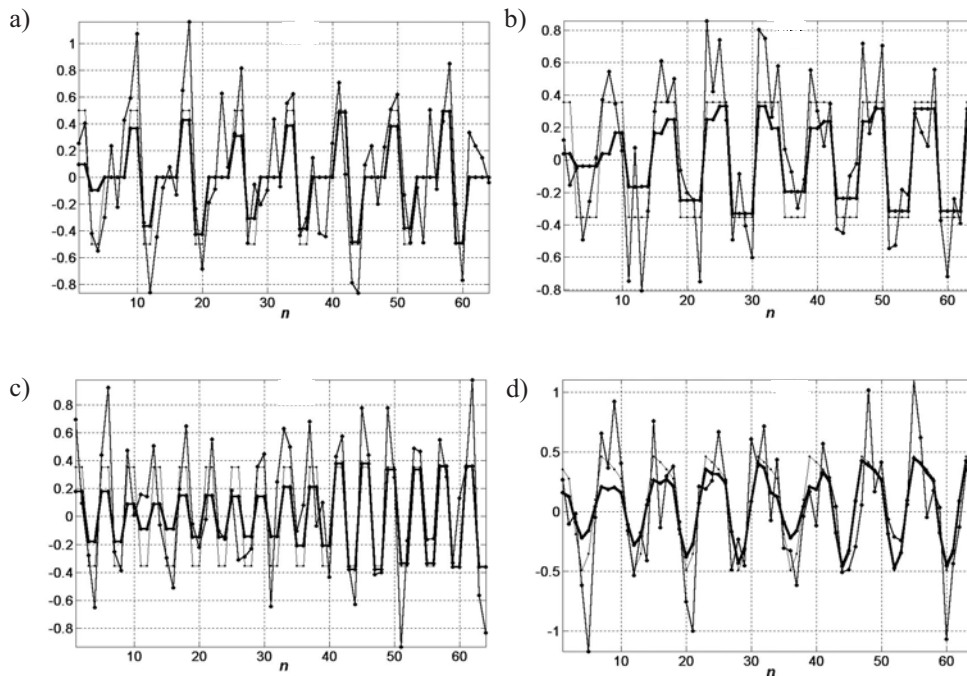
Zaproponowany w punkcie 3 algorytm został przetestowany z wykorzystaniem czterech wybranych transformacji cyfrowych. Okresowy sygnał wejściowy, $N = 8$, pełniący jednocześnie rolę sygnału referencyjnego, był za każdym razem tworzony na podstawie założonej z góry postaci transformaty. W przypadku przedstawionych poniżej wyników transformata zawierała tylko jedną niezerową wartość, 1, w punkcie o indeksie $k = 2$ (przy indeksowaniu od 0). Sygnał zakłócający był generowany pseudolosowo z amplitudą tego samego rzędu, co sygnał referencyjny. Przy realizacji algorytmu przyjęto następujące wartości współczynników: $\delta_0 = 0,3$; $\alpha = 0,995$.



Rys. 2. Przykładowy proces adaptacji filtru dla kolejnych ośmiu okresów sygnału, gdy sygnał referencyjny jest „prążkowy” ($k = 2$) w dziedzinie transformaty Haara, przedstawiony w dziedzinie tej transformaty

Na rysunku 2 przedstawiono w dziedzinie transformaty Haara, w jaki sposób w trakcie przykładowej symulacji zmieniał się filtr po kolejnych cyklach adaptacji, natomiast rysunek 3 ukazuje przebiegi w ramach pierwszych ośmiu cykli, czyli bloków, odpowiednio dla sygnału referencyjnego, zakłóconego i odtworzonego.

Odpowiednie symulacje potwierdziły także poprawność zaproponowanej modyfikacji filtru Wienera (10), (11) i (12), gdzie przyjęte założenia dają idealne dopasowanie sygnału na wyjściu filtru do sygnału referencyjnego.



Rys. 3. Przebiegi uzyskane dla transformacji: a) Haara, b) Hadamarda, c) Hartleya, d) kosinusowej typu 3; cienka linia – przebieg referencyjny (x), średnia linia – przebieg obserwowany (x_{obs}), najgrubsza linia – przebieg po filtracji (x_{est})

6. Podsumowanie

Zaproponowane i potwierdzone symulacjami rozwiązanie umożliwia badanie właściwości filtrów adaptacyjnych oraz rozwiązywanie zagadnień filtracji adaptacyjnej przy bezpośrednim wykorzystaniu wybranej transformacji dyskretnej, innej niż powszechnie stosowana transformacja Fouriera. Badanie danego problemu z wykorzystaniem transformacji dostosowanej do specyfiki sygnału, tak iż jego opis ma charakter „prążkowy”, prowadzi do odpowiedniego uproszczenia rozważań, dzięki czemu poszukiwane rozwiązanie staje się bardziej czytelne i łatwiejsze do opisanie.

Literatura

- [1] Clarke R.J.: *Transform Coding of Images*. Academic Press, 1985
- [2] Haykin S.: *Adaptive Filter Theory*. Upper Saddle River, Prentice Hall 1996
- [3] Korohoda P., Dąbrowski A.: *Generalized Primary Domain Interpretation of Product Filtering of Digital Signals in the Transform Domain*. Materiały: IEEE Workshop on Signal Processing, Poznań, 2003, 75–80
- [4] Korohoda P., Dąbrowski A.: *Generalized Convolution Concept Based on DCT*. Materiały: 12th EUSIPCO, konferencja organizowana przez EURASIP, Wiedeń, 2004, 973–976

-
- [5] Korohoda P., Dąbrowski A.: *Generalized convolution concept for filtering of random signals*. Materiały: IEEE Workshop on Signal Processing, Poznań, 2004, 55–60
 - [6] Korohoda P.: *Generalized convolution with windowing in the primary domain*. Materiały: 11th International Workshop on Systems, Signals and Image Processing, Poznań, 2004, 383–386
 - [7] Korohoda P.: *Odpowiednik pojęcia odpowiedzi impulsowej dla wybranych transformacji dyskretnych*. Półrocznik AGH Automatyka, t. 8, z. 3, 2004, 351–359
 - [8] Proakis G., Manolakis D.G.: *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. 3rd ed., Prentice Hall, 1996
 - [9] Zieliński T.: *Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. Kraków, Wyd. AGH 2002

