

Robert Ambroziak*, Joanna Sekulska-Nalewajko*, Marek Matulski*

Analiza wymiaru fraktalnego okrzemek

1. Wprowadzenie

Nauka opisuje zmieniającą się rzeczywistość na podstawie poznanego porządku opierającego się na sekwencji wzajemnie uwarunkowanych przyczyn i skutków [2]. Każda nieregularność powinna zostać wytłumaczona jako działanie jakiejś przyczyny. Nie zawsze jednak ta przyczyna musi być znana. Według deterministycznego podejścia do nauki każde prawo czeka tylko na to, aż ktoś je odkryje. Jest to bardzo optymistyczne spojrzenie na możliwości poznawcze człowieka. Mając takie narzędzie jak komputer, człowiek spodziewa się, że prawa, które odkrył, pozwolą mu szybciej i dokładniej przewidzieć zjawiska, których zachowanie poznał. Okazuje się jednak, że czasami nawet to narzędzie nie radzi sobie z nieskończoną ilością przyczyn, które kształtują zachowanie procesów w rzeczywistości.

Paradoksalnie to właśnie komputer uzmysłowił człowiekowi jak bardzo skomplikowany jest świat i że być może niektóre procesy nigdy nie zostaną przez niego przewidziane. Człowiek poczuł się bezradny przy próbie poznania tych procesów i nazwał je chaotycznymi. Takie podejście do nauki, przeciwne do podejścia deterministycznego, przyczyniło się do próby ogarnięcia chaotycznych zjawisk za pomocą metod przybliżających ich zachowanie [1]. Do głównych tego typu dziedzin nauki można zaliczyć analizę statystyczną, która opiera się na rachunku prawdopodobieństwa i badaniu zmiennej losowej [2, 3]. Inną dziedziną wyjaśniającą procesy naturalne jest **teoria chaosu**, której jednym z narzędzi jest **geometria fraktalna**. Obydwie dziedziny są ze sobą ściśle powiązane. Charakter języka geometrii fraktalnej, a więc samych **fraktali**, jest idealny do opisu, może nie samych procesów badanych przez teorię chaosu, ale ich skutków. Każde zjawisko chaotyczne zachodzi według pewnych reguł. Jedną z tych reguł jest to, że przyczyny tych zjawisk zależą od procesów ściśle określonych, a skutki zjawiska chaotycznego da się przewidzieć. Przykładowo na proces formowania się chmury ma wpływ wilgotność i temperatura powietrza, siła wiatru, ciśnienie itd. Zatem można się spodziewać, że sam proces formowania się chmury zachodzi według ściśle określonego schematu, którego algorytm daje według nas chaotyczne

* Katedra Informatyki Stosowanej, Politechnika Łódzka; rambroz@kis.p.lodz.pl;
jsekulska@kis.p.lodz.pl

efekty. Powstaje pytanie: jak dojść do tego, aby można było przewidywać kształt chmury? Teoria chaosu nie pozwoli jeszcze przewidzieć, jak dokładnie uformuje się chmura, ale dzięki geometrii fraktalnej można wygenerować jej losowy kształt.

2. Analiza fraktalna obrazu

Fraktal jest w geometrii fraktalnej tym samym, czym w geometrii euklidesowej jest figura. Jego główną cechą jest jego wymiar topologiczny w tym przypadku nazwany fraktalnym, który w przeciwieństwie do zwykłych figur nie jest liczbą całkowitą. Od niego właśnie pochodzi nazwa „fraktal”, co z greckiego *fract* znaczy „częściowy”. Naturalne wydaje się rozpoznanie wymiaru topologicznego figury po pierwszym na nią spojrzeniu.

Istnieje jednak matematyczny sposób na obliczenie jego wartości:

$$a = \left(\frac{1}{s}\right)^D, \quad D = \frac{\log(a)}{\log\left(\frac{1}{s}\right)} \quad (1)$$

gdzie:

D – wymiar,

s – współczynnik skalowania „siatki mierniczej”,

a – (moc) ilość jednostek miary potrzebna do opisu figury po jej przeskalowaniu współczynnikiem s .

Przy wykorzystaniu wzoru można na przykład udowodnić, że odcinek jest figurą jednowymiarową, zaś kwadrat dwuwymiarową.

Jednym z wynalazków geometrii fraktalnej jest metoda służąca do analizy obrazu, zwana analizą fraktalną. Została ona opracowana przez Benoit B. Mandelbrota. Opiera się ona na tezie, iż każda figura ma swój charakterystyczny i unikalny wymiar fraktalny. Inaczej mówiąc, każda figura może zachowywać się jak fraktal i w pewnym stopniu spełnia warunek samopodobieństwa. W związku z tym, kształt figury można odróżnić od innych kształtów poprzez porównanie jego wymiaru fraktalnego z wymiarami innych kształtów. Jeśli zatem mielibyśmy do rozwiązania zadanie polegające na rozpoznawaniu pewnych obiektów o charakterystycznych kształtach, to dobrym sposobem może się okazać skorzystanie z tej właśnie metody.

Metoda najmniejszych kwadratów polega na określeniu na podstawie punktów empirycznych $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ najlepszej z punktu widzenia rachunku prawdopodobieństwa funkcji $f(x, d, b)$, dla której suma kwadratów odchyleń wartości y_i od wartości teoretycznych $f(x, d, b)$ jest możliwie najmniejsza (2), czyli minimalizowane jest wyrażenie

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, d, b)]^2 = \min \quad (2)$$

W przypadku funkcji liniowej ($y = dx + b$) otrzymuje się następujące wzory (3) na parametry d i b :

$$d = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (3)$$

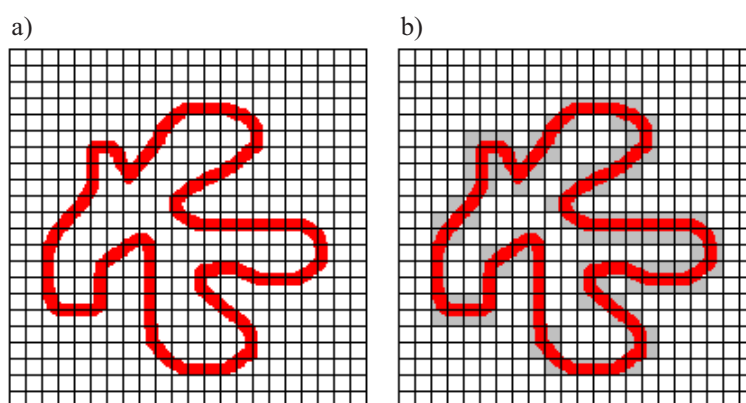
Na podstawie równań (2) i (3) Mandelbrot powiązał współczynnik nachylenia prostej (d) z wymiarem fraktalnym (D)

$$D = d + 1 \quad (4)$$

Analiza fraktalna polega zatem na szacowaniu wymiaru fraktalnego figur. Wykorzystuje się w tym celu zależność $D = d + 1$, z której wynika, że do policzenia wymiaru fraktalnego wystarczy oszacować współczynnik nachylenia prostej d . Aby obliczyć ten współczynnik, należy przeprowadzić wcześniej odpowiednie pomiary. Na ich podstawie będzie można za pomocą metody najmniejszych kwadratów określić poszukiwaną wartość współczynnika nachylenia prostej z wykresu.

W metodzie „pudełkowej” obiekt nie musi mieć wcale wyznaczonego konturu, aby został prawidłowo oszacowany jego wymiar fraktalny. Dlatego jest ona wygodna przy analizowaniu np. tekstur. Metoda polega na nakładaniu na analizowany obraz siatki o różnych rozmiarach, a następnie zliczaniu pól, w których zawiera się analizowany obiekt. Następnie na wykres w skali podwójnie logarytmicznej trafiają: na oś Y – liczba pól należących do obiektu pomnożona przez rozmiar elementu siatki, a na oś X odwrotność rozmiaru elementu siatki. Tangens kąta nachylenia tej prostej do osi X , czyli współczynnik d zwiększony o jeden daje w wyniku tzw. wymiar Kolmogorowa [1].

Na rysunku 1 przedstawiony jest przykład analizy fraktalnej konturu metodą „pudełkową” dla siatki o rozmiarze elementu równym 5.



Rys. 1. Metoda pudełkowa dla siatki $s = 5$. Obiekt z siatką (a), elementy wybrane (zaznaczone na jasnoszaro) (b)

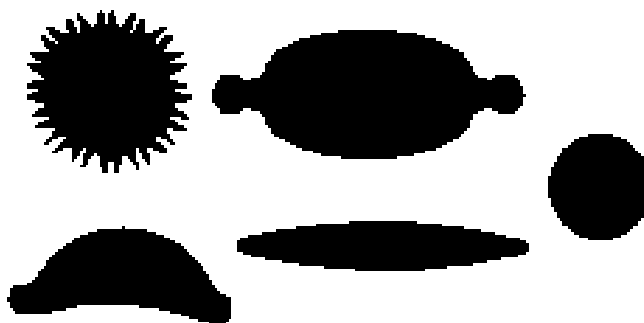
Liczba elementów siatki, w której znajduje się kontur wynosi 137.

- 1) $x_1 = \log(1/5)$, $y_1 = \log(5 \cdot 137) = \log(685)$,
- 2) $x_2 = \log(1/10)$, $y_2 = \log(10 \cdot 57) = \log(570)$.

3. Badanie wymiaru fraktalnego okrzemek

Okrzemki (*Bacillariophyta*) są to jednokomórkowe organizmy należące do glonów, czasami formujące kolonie. Ich ściany komórkowe zbudowane są z dwu nakładających się na siebie części impregnowanych krzemionką. Uwodniona krzemionka jest podobna do szkła i układa się w niezwykle misterne wzory, które wykorzystuje się do klasyfikacji okrzemek. Przy identyfikacji wykorzystywany jest także rozmiar oraz kształt krzemionkowej skorupki.

Na podstawie oszacowanych wymiarów fraktalnych dla kształtów okrzemek została oceniona przydatność tych parametrów przy próbach klasyfikacji tych glonów.

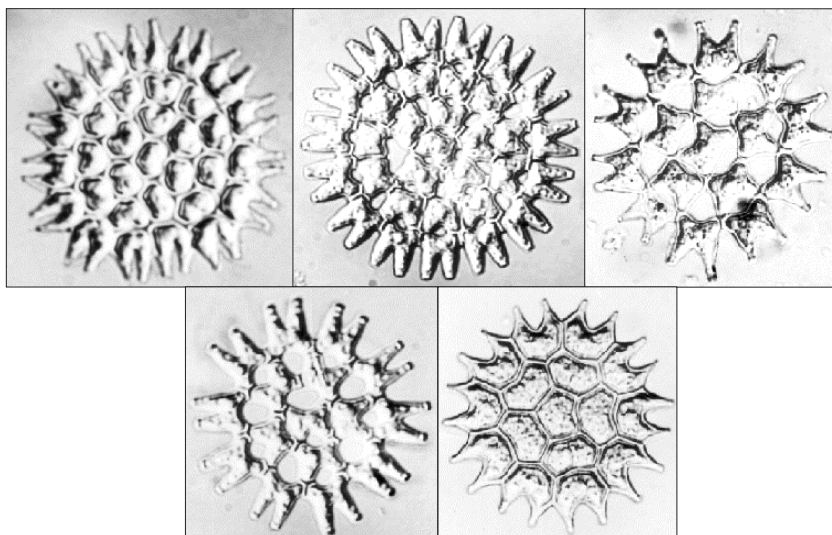


Rys. 2. Typowe kształty okrzemek

Wszystkie gatunki okrzemek można podzielić ze względu na ich kształt na gatunki o symetrii promienistej, o kształcie łódki, igły, trójkąta itp. W pracy zostały przeanalizowane między innymi wymiary fraktalne okrzemek o kształtach przedstawionych na rysunku 2. Dodatkowo przedstawiono analizę przedstawicieli zielenic (*Chlorophyta*) z rodzaju *Pediastrum*, ze względu na możliwość porównania ich wymiaru fraktalnego z wymiarami okrzemek, a także na ich ciekawy i rozbudowany kształt kolonii.

3.1. Typ pierwszy

Pierwszym typem morfologicznym, który został poddany badaniu to zielenice z rodzaju *Pediastrum*. Charakteryzują się one symetrią osiową kolonii oraz licznymi wyrostkami znajdującymi się na ich brzegowych komórkach. Zdjęcia mikroskopowe tych organizmów znajdują się na rysunku 3.



Rys. 3. Obrazy organizmów typu pierwszego należących do zielenic z rodzaju *Pediatrum*

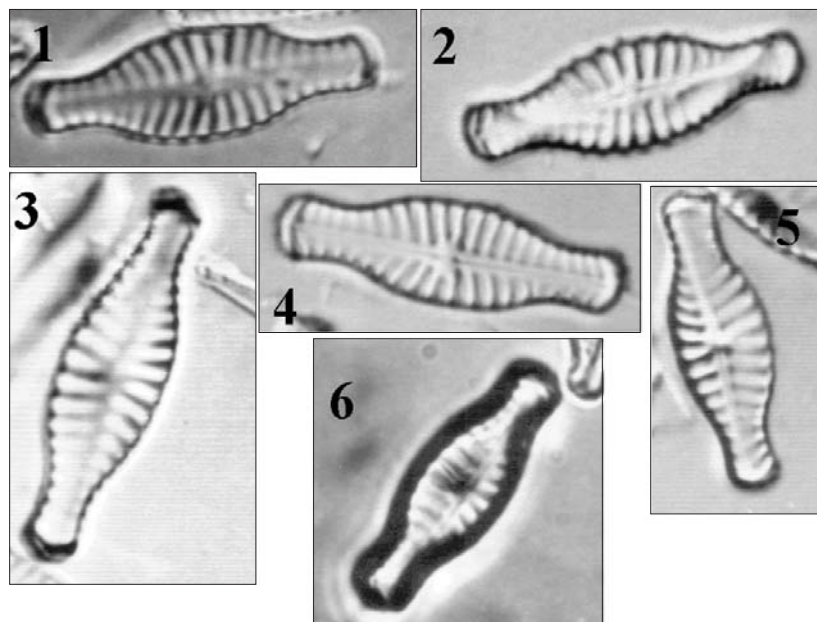
Tabela 1
Wymiary fraktalne obiektów typu pierwszego dla różnych wartości parametru p

Nr	$K(p=2)$	$K(p=5)$	$K(p=10)$	$K(p=15)$	$K(p=20)$	$K(p=30)$
1	1,170	1,209	1,250	1,252	1,277	1,286
2	1,239	1,286	1,325	1,375	1,354	1,414
3	1,237	1,283	1,328	1,362	1,384	1,479
4	1,248	1,285	1,337	1,378	1,385	1,384
5	1,176	1,248	1,292	1,328	1,377	1,413
Średnia	1,214	1,262	1,306	1,339	1,355	1,395
SD	0,0377	0,0337	0,0358	0,0525	0,0456	0,0702

Jak widać w tabeli 1, wymiary fraktalne tych glonów mają stosunkowo duże wartości od 1,25 do 1,4. Wyraźnie mniejsze wymiary fraktalne występują tu dla pierwszego obrazu. Może to znacznie zaniżać średnią wymiarów dla tego typu okazów.

3.2. Typ drugi

Drugim typem morfologicznym poddanym analizie są okrzemki z gatunku *Hippodonta capitata* (rys. 4).



Rys. 4. Obrazy okrzemek typu drugiego (1–6) – *Hippodonta capitata*

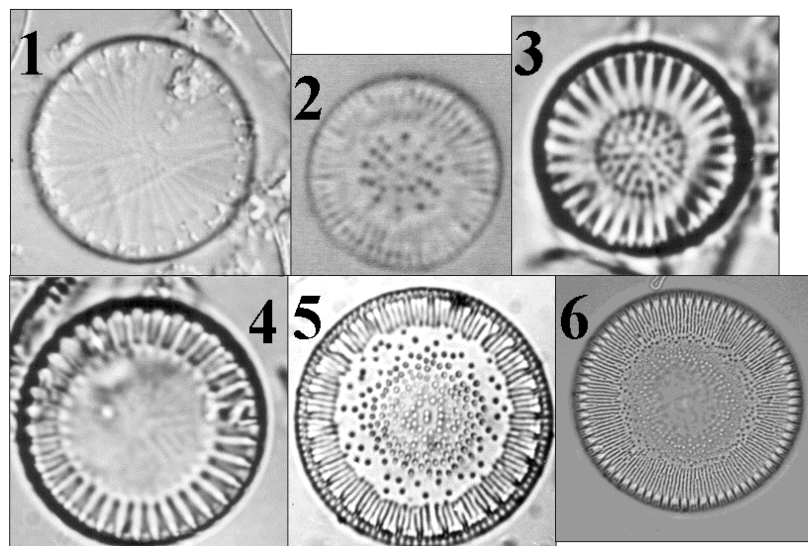
Tabela 2
Wymiary fraktalne obiektów typu drugiego dla różnych wartości parametru p

Nr	$K(p=2)$	$K(p=5)$	$K(p=10)$	$K(p=15)$	$K(p=20)$	$K(p=30)$
1	1,056	1,079	1,092	1,069	1,163	1,004
2	1,069	1,045	1,056	1,058	1,088	1,114
3	1,044	1,052	1,065	1,073	1,076	1,038
4	1,024	1,053	1,051	1,071	1,075	0,936
5	1,049	1,037	1,051	1,054	1,058	1,081
Średnia	1,040	1,053	1,067	1,071	1,094	1,051
SD	0,0253	0,0141	0,0180	0,0158	0,0370	0,0742

Ten typ okrzemek ma znacznie mniejsze wymiary fraktalne niż klasa go poprzedzająca (tab. 2).

3.3. Typ trzeci

Trzeci typ morfologiczny to okrzemki o symetrii promienistej. Do badań wybrano kilka pospolitych gatunków z rodzaju *Cyclotella*, *Cyclostephanos* i *Stephanodiscus* (rys. 5).



Rys. 5. Obrazy okrzemek typu trzeciego: 1 – *Stephanodiscus hantzschii*, 2 – *Cyclotella ocellata*, 3 – *Cyclostephanos dubius*, 4 – *Cyclotella meneghiniana*, 5 – *Cyclotella radiososa*, 6 – *Cyclotella* sp.

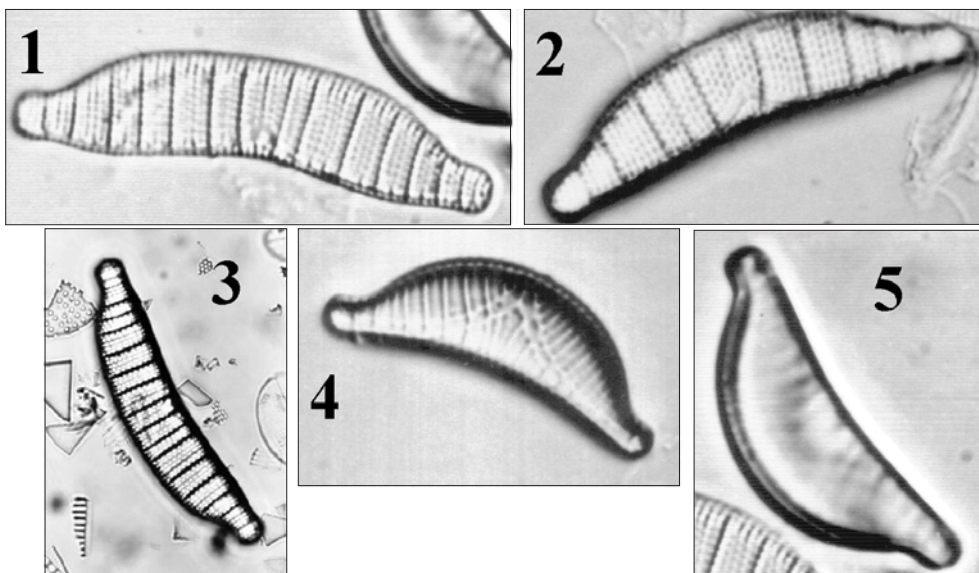
Tabela 3
Wymiary fraktalne obiektów typu 3 dla różnych wartości parametru p

Nr	$K(p=2)$	$K(p=5)$	$K(p=10)$	$K(p=15)$	$K(p=20)$	$K(p=30)$
1	1,032	1,054	1,068	1,054	1,110	1,003
2	1,014	1,046	1,078	1,046	1,050	1,113
3	1,020	1,050	1,066	1,050	1,084	1,075
4	1,043	1,048	1,074	1,048	1,071	1,125
5	1,049	1,052	1,064	1,052	1,086	1,109
Średnia	1,031	1,052	1,070	1,052	1,081	1,083
SD	0,0132	0,0050	0,0052	0,0050	0,020	0,0442

Jak widać z wyników przedstawionych w tabeli 3, wymiary fraktalne okrzemek centralnych są bardzo podobne do wymiarów okrzemek typu drugiego.

3.4. Typ czwarty

W czwartym typie umieszczono okrzemki należące do rodzaju *Epithemia*, charakteryzujące się wydłużonym kształtem komórek i jedną osią symetrii (rys. 6). Wyniki analizy fraktalnej tego typu przedstawiono w tabeli 4.



Rys. 6. Obrazy okrzemek typu czwartego: 1, 2, 3 – *Epithemia adnata*,
4, 5 – *Epithemia sorex*

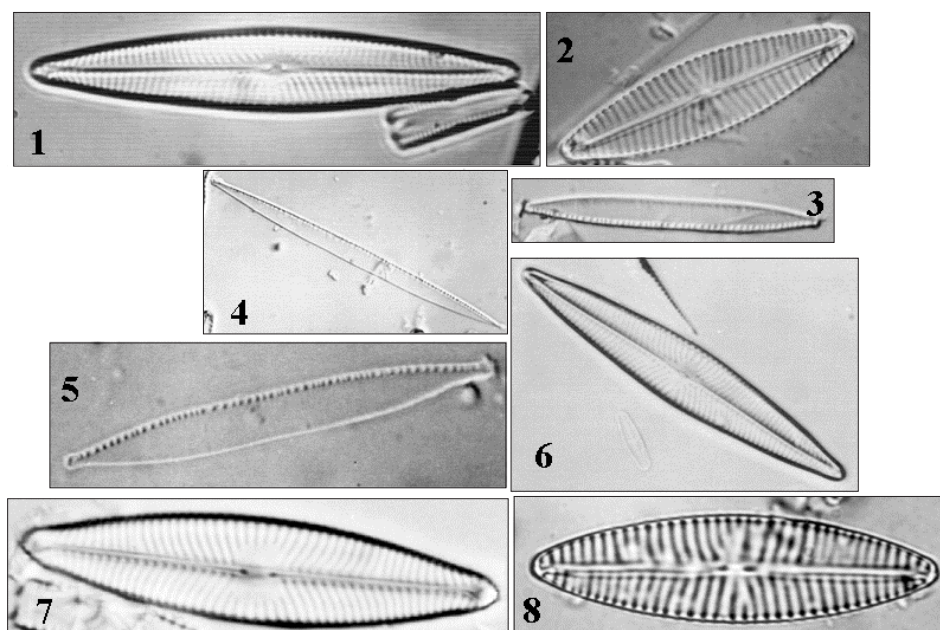
Tabela 4

Wymiary fraktalne okrzemek typu czwartego dla różnych wartości parametru p

Nr	$K(p=2)$	$K(p=5)$	$K(p=10)$	$K(p=15)$	$K(p=20)$	$K(p=30)$
1	1,001	1,022	1,029	1,051	1,026	1,062
2	1,038	1,041	1,057	1,052	1,091	1,053
3	1,064	1,074	1,095	1,101	1,110	1,170
4	1,023	1,049	1,051	1,054	1,070	1,090
5	1,054	1,061	1,082	1,085	1,127	1,104
Średnia	1,036	1,050	1,056	1,069	1,085	1,096
SD	0,0250	0,0198	0,0280	0,0230	0,0392	0,0463

3.5. Typ piąty

Gatunki okrzemek zaliczone do typu piątego charakteryzują się wrzecionowatym, podobnym do łódki kształtem. Takim kształtem posiadają gatunki z rodzaju *Navicula* i *Nitzschia* (rys. 7). Wyniki analizy fraktalnej tego typu przedstawiono w tabeli 5.



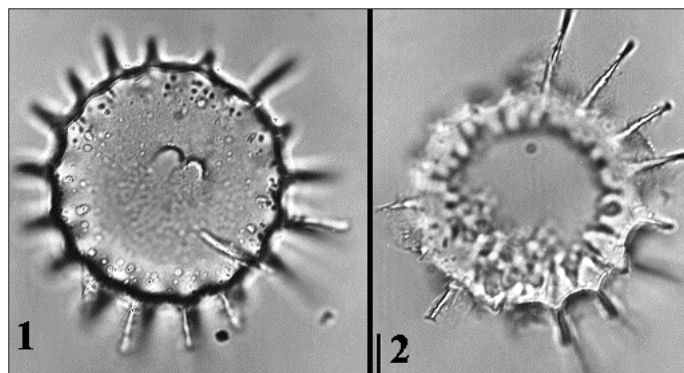
Rys. 7. Obrazy okrzemek typu piątego: 1, 6 – *Navicula radiosa*; 2, 8 – *Navicula oppugnata*; 3, 4 – *Nitzschia paleacea*; 5 – *Nitzschia palea*; 7 – *Navicula lanceolata*

Tabela 5
Wymiary fraktalne obiektów typu piątego dla różnych wartości parametru p

Nr	$K(p=2)$	$K(p=5)$	$K(p=10)$	$K(p=15)$	$K(p=20)$	$K(p=30)$
1	1,025	1,148	1,181	1,210	1,168	1,190
2	1,013	1,053	1,067	1,086	1,084	1,131
3	1,001	1,051	1,060	1,082	1,062	1,048
4	0,998	1,024	1,030	1,053	1,032	1,161
5	1,018	1,022	1,024	1,042	1,049	1,152
Średnia	1,021	1,049	1,066	1,050	1,093	1,138
SD	0,0319	0,0421	0,0516	0,0421	0,0751	0,0841

3.6. Typ szósty

Jako ostatni typ szósty wyróżniono okrzemkę o symetrii promienistej z rodzaju *Melosira*, która charakteryzuje się wyraźnymi bocznymi wyrostkami (rys. 8). Wyniki analizy fraktalnej tego typu przedstawiono w tabeli 6.



Rys. 8. Okazy (1 i 2) okrzemek typu czwartego

Tabela 6
Wymiary fraktalne obiektów typu szóstego dla różnych wartości parametru p

Nr	$K(p=2)$	$K(p=5)$	$K(p=10)$	$K(p=15)$	$K(p=20)$	$K(p=30)$
1	1,188	1,253	1,308	1,362	1,335	1,371
2	1,184	1,251	1,301	1,366	1,334	1,372
3	1,183	1,252	1,312	1,363	1,338	1,369
4	1,181	1,255	1,311	1,369	1,336	1,370
5	1,184	1,249	1,292	1,336	1,337	1,357
Średnia	1,186	1,252	1,303	1,353	1,336	1,365
SD	0,0028	0,0042	0,0134	0,0233	0,0007	0,0106

Po przeprowadzeniu pomiarów dla różnych wielkości minimalnego rozmiaru elementu pomiarowego okazało się, że wymiary fraktalne mają tendencję rosnącą dla coraz większych wartości p . Jednocześnie dla niektórych przypadków zwiększa się różnica pomiędzy wymiarami fraktalnym dla różnych metod (tab. 6).

W dalszej części badań porównano wyniki analizy fraktalnej dla minimalnego rozmiaru elementu skalującego, $p = 2$. Jest to standardowa wartość tego parametru. Zminimalizowanie parametru skalującego oznacza, że przy obliczaniu wymiarów fraktalnych brane są pod uwagę najmniejsze szczegóły obiektów, co wydaje się być odpowiednie do analizy skomplikowanej budowy morfologicznej okrzemek.

Jak widać, w tym przypadku wymiary fraktalne niektórych typów okrzemek są do siebie bardzo zbliżone, co może uniemożliwić zastosowanie analizy fraktalnej przy rozróżnianiu klas tych obiektów (tab. 7). Szczególnie widać to w przypadku typu drugiego i czwartego, których wyniki są dla dwóch wymiarów nawet identyczne. Nieznacznie różnią się od nich typy trzeci i piąty. Wszystkie te obiekty mają prosty kształt.

Typ szósty, w którym występowała okrzemka z wyraźnymi wyrostkami bocznymi, charakteryzuje się większym wymiarem fraktalnym, a w związku z tym różni się znacznie od pozostałych typów morfologicznych okrzemek. Największą wartość wymiaru fraktalnego, a zarazem różnicę od pozostałych typów prezentuje typ pierwszy, czyli organizm nienależący do okrzemek, choć zbliżony kształtem do typu szóstego.

Tabela 7
Zestawienie średnich wartości wymiarów fraktalnych dla każdej badanej klasy okrzemek

TYP	Średnie K	SD
TYP 1	1,395	0,0702
TYP 2	1,040	0,0253
TYP 3	1,031	0,0132
TYP 4	1,036	0,0250
TYP 5	1,021	0,0319
TYP 6	1,186	0,0028

Tabela 8
Statystyka wyników klasyfikacji dla wszystkich klas (w wierszach liczba obiektów danej klasy sklasyfikowanych jako obiekt klasy dla odpowiedniej kolumny)

	1	2	3	4	5	6		
1	5	0	0	0	0	0	5	100%
2	0	0	0	4	2	0	6	0%
3	0	0	5	1	0	0	6	83%
4	0	4	0	0	1	0	5	0%
5	0	1	0	3	4	0	8	50%
6	1	0	0	0	0	1	2	50%
Razem	6	5	5	8	7	1		
S	83%	0%	100%	0%	14%	100%		
Błąd	3%	16%	0%	25%	9%	0%		53%

Dla sprawdzenia możliwości wykorzystania otrzymanych wymiarów fraktalnych w celu rozpoznawania badanych okrzemek przeprowadzono doświadczenie polegające na klasyfikacji każdego obiektu metodą najbliższego sąsiada. Zbiór uczący składał się z wszystkich pozostałych obiektów, co oznacza, że był zależny od aktualnie badanych kształtów. W tabeli 8 znajduje się statystyczne podsumowanie wyników doświadczenia.

W każdym wierszu zostały rozłożone wszystkie obiekty danej klasy tak, że w odpowiednich kolumnach znajduje się liczba obiektów tej klasy przypisana do klasy, której odpowiada ta kolumna. Ponadto w ostatniej kolumnie po prawej stronie znajduje się procentowy udział prawidłowo sklasyfikowanych obiektów w stosunku do wszystkich obiektów danej klasy. W przedostatnim wierszu zaś znajduje się informacja o procentowym udziale prawidłowo sklasyfikowanych obiektów danej klasy w stosunku do wszystkich obiektów sklasyfikowanych do tej klasy (wiersz oznaczony literą S), w ostatnim wierszu zaś znajduje się procentowy błąd, jaki stanowią wszystkie źle sklasyfikowane obiekty klasy.

Obie klasy charakteryzują się podobnymi wymiarami fraktalnym, co zostało zauważone już wcześniej przy ich obliczeniu. Po przeprowadzeniu doświadczenia można już potwierdzić, że obiekty tych dwóch klas nie nadają się do rozpoznawania ich za pomocą metody analizy fraktalnej. Nie spełniają przede wszystkim warunków unikalnych wymiarów fraktalnych.

4. Wnioski

Analiza fraktalna należy do metod analizy morfologicznej obiektów o różnym stopniu złożoności. Wyraźne różnice między wymiarami fraktalnymi stwierdzano w badaniach na obiektach fantomowych obiektów prostych, jak i bardziej złożonych. Jednak w przypadku kształtu okrzemek, mimo różnic morfologicznych tych glonów, nie we wszystkich przypadkach metoda ta daje korzystne rezultaty. Trudności napotyka się w przypadku okrzemek o prostych kształtach, gdyż różnice wymiarów fraktalnych poszczególnych typów o budowie prostej są zbyt małe, co stwarza wiele problemów przy ich późniejszej klasyfikacji. W przypadku okrzemek o bardziej złożonych kształtach skorupki różnice wymiarów fraktalnych są na tyle duże, że w zupełności mogą wystarczyć do wykorzystania takiej analizy do rozpoznawania tych glonów w obrazach mikroskopowych.

Łączenie wszystkich rodzajów okrzemek w jednym wspólnym doświadczeniu wykazuje, iż zbliżona morfologia niektórych obiektów należących do różnych klas, może unieemożliwić poprawne działanie systemu rozpoznawania tych organizmów opartego na analizie fraktalnej kształtu. Wyniki mogą ulec znacznemu polepszeniu po połączeniu podobnych obiektów we wspólną klasę.

Literatura

- [3] Krzysztof W. Z., Strzelecki M.: *Komputerowa analiza obrazu biomedycznego. Wstęp do morfometrii i patologii ilościowej*. Warszawa – Łódź, PWN 2002
- [4] Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D.: *Granice chaosu. Fraktale, cz. 1*. Warszawa, PWN 1995
- [5] Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D.: *Granice chaosu. Fraktale, część 2*. Warszawa, PWN 1995
- [6] Kaye B.H.: *A Random Walk Through Fractal Dimensions*. Weinheim, VCH Verlagsgesellschaft mbH 1994
- [7] Bovill C.: *Fractal Geometry in Architecture and design*. Boston, Birkhauser 1996