

Andrzej Romanowski*, Krzysztof Grudziń*

Zestawienie metod rekonstrukcji obrazów i modelowania przestrzennego 2D dla tomografii procesowej

1. Wstęp

Tomografia jest techniką pomiarową, która pozwala wizualizować w postaci obrazu 2D lub 3D stan badanego procesu na podstawie pomiaru zebranych z granic obiektu. Rekonstrukcja obrazów tomograficznych jest procesem złożonym i aby otrzymać obraz, należy rozważyć dwa zagadnienia:

- 1) problem prosty,
- 2) problem odwrotny.

Rozwiązanie problemu prostego polega na obliczeniu wartości mierzonej wielkości fizycznej przy użyciu np: metody elementów skończonych FEM (*finite element method*). Natomiast rozwiązanie zagadnienia odwrotnego polega na znalezieniu rozkładu własności materiału w przestrzeni pomiarowej, która spowodowała taki, a nie inny pomiar.

W elektrycznej tomografii procesowej mamy odczynienia z tzw. efektem „miękkiego pola” (*soft field effect*). W przypadku występowania efektu miękkiego pola, linie pola elektrycznego związane z pomiarami zależne są od własności elektrycznych materiału znajdującego się w przestrzeni pomiarowej. W pojemnościowej tomografii procesowej sygnał pomiarowy nie przechodzi wzdłuż linii prostej przez rozkład stałej dielektrycznej materiału wewnątrz przekroju poprzecznego. Skutkuje to trudnościami w rozwiązaniu problemu odwrotnego – uzyskaniu informacji o wewnętrznym stanie badanego obiektu na podstawie pomiarów dokonanych na jego granicach. Tego typu zagadnienie ma tę własność, że jest podkreślone i źle uwarunkowane, a więc nie ma rozwiązania ani unikalnego, ani stabilnego. Natomiast zagadnienie proste, które jest także jest nieliniowe, jest dobrze uwarunkowane i może być rozwiązane numerycznie choćby przy użyciu metody elementów skończonych.

Otrzymana reprezentacja graficzna stanu procesu w postaci obrazu pozwala w dalszym etapie estymować szukane parametry procesu, np. prędkość przepływu i masę przepływu w transporcie pneumatycznym materiałów sypkich. Dlatego też obraz dobrej jakości

* Katedra Informatyki Stosowanej, Politechnika Łódzka

i obarczony małym błędem pozwoli na polepszenie kontroli i monitorowanie procesów przemysłowych.

Najczęściej pierwszym krokiem do uzyskania informacji o badanym procesie przy użyciu tomografii procesowej jest rekonstrukcja obrazu. W badaniach została użyta pojemnościowa tomografia procesowa, która pozwala na znalezienie rozkładu przenikalności dielektrycznej ϵ na podstawie pomiarów pojemności C . Zastosowany 8-elektrodowy sensor, pozwala na uzyskanie zbioru $K = 28$ pomiarów pojemności $C = [C_1, C_2, \dots, C_{28}]$. Aby uzyskać obraz składający się (w tym przypadku z $L = 704$) z elementów – pikseli, z których każdy prezentuje wartość przenikalności dielektrycznej, należy w pierwszym kroku rozwiązać problem odwrotny, z 28 pomiarów otrzymać 704 niewiadome (piksele). Dla potrzeb niniejszego artykułu piksele mają kształt trójkątów.

W porównaniu z technikami tomografii opartymi na promieniach X lub gamma tomografia elektryczna dostarcza obrazy o małej rozdzielczości. Przyczyną jest m.in. mała liczba pomiarów oraz nieliniowość problemu odwrotnego. Ta nieliniowość problemu odwrotnego powoduje to, że proces rekonstrukcji jest bardzo złożony.

Aby rozwiązać problem odwrotny, rozwija się i opracowuje wiele metod. Klasyczne metody rozwiązywania problemu odwrotnego zwykle opierają się na założeniu linearyzacji pola elektrycznego. Metody te często nie są precyzyjne, co więcej, nie dają żadnej informacji na temat rozmiaru błędu rekonstrukcji. Najprostsze z nich to liniowa projekcja wsteczna LBP (*Linear Back Projection*) i jej modyfikacja – filtracja projekcji wstecznej (FLBP). Bardziej zaawansowane techniki to technika algebraicznej rekonstrukcji (ART), *model-based reconstruction* (MOR) [3, 4].

W praktyce, aby rozwiązać ten problem, konieczne jest zastosowanie techniki regularyzacji lub/i użyć dodatkowej wiedzy *a priori*. W artykule zostało zaprezentowane nowe podejście do rozwiązania problemu odwrotnego na przykładzie rekonstrukcji statycznych obrazów (fantomów) i porównane z klasycznymi metodami rekonstrukcji.

2. Metody rozwiązywania problemu odwrotnego

Pierwszą zastosowaną metodą w rozwoju tomografii procesowej była liniowa projekcja wsteczna, oparta na założeniu liniowości pola elektrycznego (opisana w podrozdz. 2.1).

2.1. Liniowa projekcja wsteczna (LBP)

Metody oparte na najmniejszych kwadratach (*least-squares based methods*) szacują parametry modelu poprzez minimalizację różnicy pomiędzy pomierzonymi danymi i danymi obliczonymi na podstawie liniowego problemu prostego [3, 4], czyli tzw. *forwardu*

$$\underset{K \times 1}{\mathbf{C}} = \underset{K \times L}{\mathbf{S}} * \underset{L \times 1}{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} \quad (1)$$

gdzie:

- \mathbf{S} – macierz, tzw. jacobian \mathbf{J} , czyli tzw. mapa czułości,
- $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ – obliczony rozkład przenikalności dielektrycznej.

Takie uproszczenie (linearyzacja problemu odwrotnego i prostego) stosowane jest najczęściej, gdy różnica pomiędzy stałymi dielektrycznymi dwóch materiałów znajdujących się w badanym polu nie jest duża.

Pierwszym problemem jest to, że macierz \mathbf{J} może nie być kwadratowa. Wynika to z przyjęcia innej liczby pikseli niż liczba niezależnych pomiarów. Naturalnym rozwiązaniem tego problemu jest wybranie uogólnionej odwrotności Moore'a–Penrose'a

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \quad (2)$$

w przypadku niedookreślonym oraz

$$\mathbf{J}^* = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \quad (3)$$

w przypadku nadokreślonym.

W obu przypadkach rozkład przenikalności dielektrycznej materiału jest obliczany według wzoru

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{J}^* \mathbf{C} \quad (4)$$

i jest rozwiązaniem najmniejszych kwadratów równania. Niestety nasze zadanie odwrotne jest źle postawione i odwrotność $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ lub $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ będzie obciążona dużym błędem numerycznym.

Najprostsza wersja algorytmu LBP opiera się na założeniu, że wrażliwość jest stała w granicach obszaru wrażliwości. Ponieważ idea LBP rekonstrukcji obrazu została zaprojektowana dla czujników *hard-field*, stosowanie tej metody dla czujników *soft-field* powoduje efekt rozmywania w zrekonstruowanym obrazie. Jej zaletą jest szybkość, co pozwala w większości zastosowań otrzymać obraz w czasie rzeczywistym.

2.2. Iteracyjna technika rekonstrukcji (SIRT)

Algorytm jednoczesnej rekonstrukcji iteracyjnej SIRT (*Simultaneous Iterative Reconstruction Technique*) [4]. Metoda ta bazuje na zasadzie najmniejszych kwadratów.

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon} + \text{error} \quad (5)$$

Idea SIRT jest minimalizacja błędu $\text{error} = \mathbf{C} - \mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}$.

2.3. Rekonstrukcja iteracyjna oparta na technikach regularyzacji

Celem regularyzacji jest znalezienie zbioru rozwiązań oraz następnie na wybraniu jednego rozwiązania z tego zbioru. Najczęściej stosowaną jest regularyzacja Tikhonowa [3, 4]. Stosując standardową regularyzację Tikhonowa, rozwiązanie równania (1) jest wyrażone w następujący sposób (jest to rozwiązanie bezpośrednie problemu odwrotnego)

$$\hat{\mathbf{g}} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (6)$$

gdzie:

- \mathbf{I} – macierz jednostkowa,
- μ – parametr regularyzacji,
- λ – znormalizowane wartości pomierzonych pojemności,
- $\hat{\mathbf{g}}$ – obliczony rozkład przenikalności dielektrycznej.

Równanie (6) może być traktowane jako zmodyfikowana wersja równania

$$\hat{\mathbf{g}} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \lambda \quad (7)$$

Aby istniała taka macierz odwrotna, macierz $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ została zmodyfikowana do postaci $\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mu \mathbf{I}$.

Jakość regularyzacji Tikhonowa jest silnie powiązana z parametrem μ . W związku z tym, optymalny dobór tego parametru stanowi kluczowy element regularyzacji.

2.4. Metoda *Markov random field* (Mrf)

Metoda Mrf opiera się na twierdzeniu Bayesa [1, 7], które w ogólnej postaci jest przedstawione poniżej

$$\text{Posterior} \propto \text{Likelihood} * \text{Prior} \quad (8)$$

Twierdzenie to opiera się na założeniu, że rozwiązywany problem możemy przedstawić w postaci zależności prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzeń. Powyższy zapis oznacza, że gęstość funkcji prawdopodobieństwa jest wprost proporcjonalna do iloczynu prawdopodobieństwa otoczenia oraz wiedzy *a priori*. Właśnie ta dodatkowa wiedza *a priori*, którą możemy dodać do rozwiązania problemu odwrotnego w tomografii, daje nam możliwość uzyskania stabilnego rozwiązania. W przypadku Mrf będzie to wiedza dotycząca zależności przestrzennych (np. wygląd granicy dwóch faz). W związku z tym, użycie metod klasy Mrf nosi miano modelowania przestrzennego. Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w publikacjach [7] oraz [2, 6].

Wiedza *a priori* w przypadku modelowania przestrzennego faz gaz-ciało stałe może mieć następującą postać:

$$\pi(\boldsymbol{\varepsilon}) \propto \exp\left\{-\alpha \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_p^p\right\}; \quad \alpha > 0, 0 \leq p \leq 2 \quad (9)$$

gdzie badaną własnością fizyczną ciał jest przenikalność dielektryczna, którą oznaczyliśmy jako ε . Powyższa zależność prowadzi do rozkładu Laplace'a przy normie 1 ($p = 1$), a przy normie 2 wyraża rozkład Gaussa. Aby dodatkowo uwzględnić gładkość przestrzenną, która zwykle występuje w realnych przypadkach, możemy ją modelować za pomocą homogenicznego pola Mrf. Zakładamy, że przyległe piksele mają podobną wartość i aby wyrazić lokalnie liniową wiedzę *a priori* dotyczącą gładkości obrazu, możemy zastosować następującą zależność:

$$\pi(\boldsymbol{\varepsilon}) \propto \exp\left\{-\beta \|\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_p^p\right\}; \quad \beta > 0, 0 \leq p \leq 2 \quad (10)$$

gdzie wielkość β stanowi parametr gładkości, sterujący stopniem korelacji pomiędzy sąsiednimi pikselami, a w konsekwencji gładkością obrazu.

Prawdopodobieństwo otoczenia, czyli *likelihood* dla tomografii pojemnościowej związanej z badaniem rozkładu przenikalności dielektrycznej ϵ może być wyrażone następującym wzorem

$$p(\mathbf{C} | \boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{(2\pi\tau^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} \|\mathbf{C} - \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon})\|^2 \right\} \quad (11)$$

gdzie τ^2 jest wariancją wektora niezależnie rozłożonych błędów Gaussa δ ze wzoru

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}) + \delta \quad (12)$$

Wreszcie, funkcja gęstości prawdopodobieństwa (*Posterior density function*) jest wyrażona wzorem

$$p(\boldsymbol{\epsilon} | \mathbf{C}) \propto p(\mathbf{C} | \boldsymbol{\epsilon}) * \pi(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (13)$$

Funkcja ta prezentuje kompletny stan wiedzy dotyczącej parametrów badanego zjawiska na podstawie jego pomiarów z perspektywy statystyki Bayesowskiej. Zwykle nie potrzebujemy jednak całej wiedzy, a jedynie estymację niektórych parametrów badanego zjawiska. Wyniki przedstawione w dalszej części artykułu zostały otrzymane przy użyciu estymacji średniej funkcji gęstości prawdopodobieństwa [1].

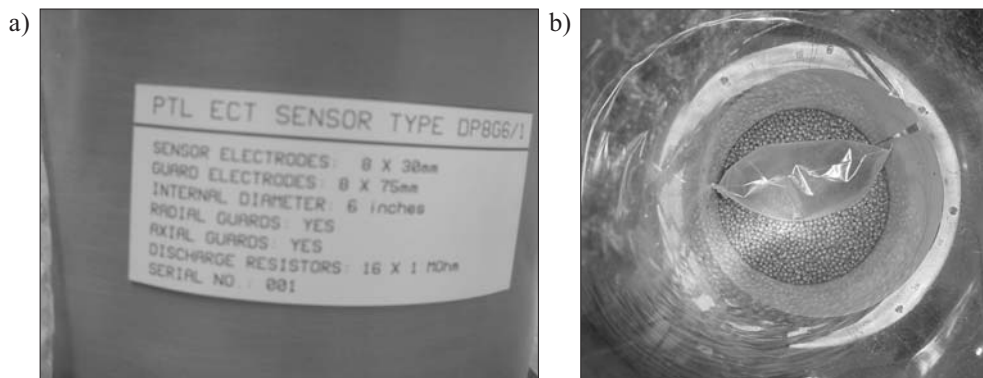
3. Opis eksperymentów

Przeprowadzone zostało kilkanaście eksperymentów z użyciem dwóch materiałów w formie sypkiej. Pierwszy z nich to granulaty poliamidowy w postaci nieregularnych granulek zbliżonych kształtem do kul, o rozmiarach średnicy około 3 mm. Drugim materiałem były kulki szklane o średnicach w zakresie od około 0,4 do 0,6 mm.

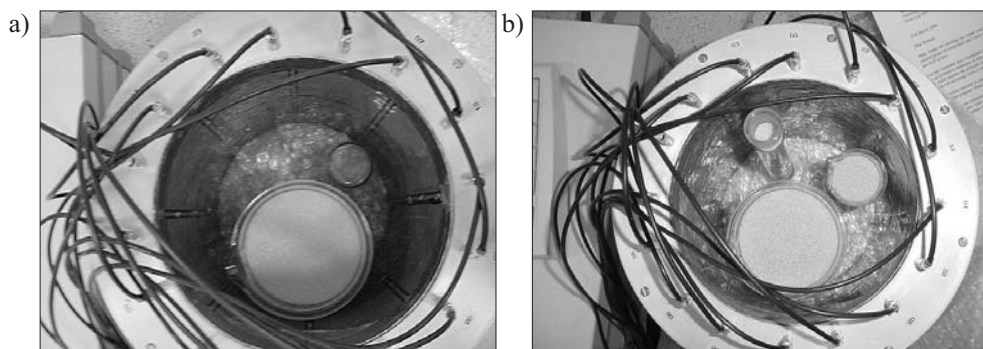
Ekspertymenty polegały na umieszczaniu w przestrzeni czujnika tomograficznego jednego na raz lub kilku jednocześnie fantomów o różnych geometriach. Liczba użytych fantomów to od 1 do 3 jednocześnie. Ekspertymenty zakładały wypełnianie przestrzeni pomiędzy pustymi fantomami badanym materiałem i przeprowadzanie pomiarów w takiej konfiguracji. Dodatkowo przeprowadzane były pomiary w konfiguracji przeciwnej, tzn. fantomy używane w ekspertymentach były wypełniane badanym materiałem, natomiast pozostała przestrzeń czujnika pozostawiana była pusta. Następnie umieszczano fantomy w takich samych położeniach jak podczas pomiarów z pustymi fantomami. Przy umieszczaniu fantomów w ekspertymentach w konfiguracji przeciwnej dopilnowano takiego samego umieszczenia fantomów względem położenia elektrod. W przypadku ekspertymentów z granulatem poliamidowym użyto fantomów wykonanych z plastiku.

Przykładowy fantom (torebka plastikowa) jest pokazany na rysunku 1b.

Natomiast do eksperymentów ze szkłem użyto fantomów wykonanych ze szkła. Przykładowe fotografie tych fantomów są na rysunku 2.



Rys. 1. Zdjęcia: a) czujnika tomograficznego z boku; b) jednego z fantomów użytych w trakcie eksperymentów z kulkami poliamidowymi (torebka plastikowa wypełniona powietrzem otoczona granulatem poliamidowym)



Rys. 2. Zdjęcia fantomów użytych w trakcie eksperymentów ze szkłem ulokowanych w przestrzeni pomiarowej czujnika: a) dwa szklane fantomy wypełnione szkłem; b) trzy szklane fantomy umieszczone w obrębie czujnika

Do pomiarów użyto tomografu firmy PTL. Jako czujnik zastosowano ośmioelektrodowy sensor produkcji PTL, typu DP8G6/1 wyposażony w elektrody typu *guard*, zarówno promieniowe jak i osiowe, oraz rezystory ochronne 1 MOhm.

Wymiary elektrod: pomiarowe – 8×30 mm, *guard* – 8×75 mm.

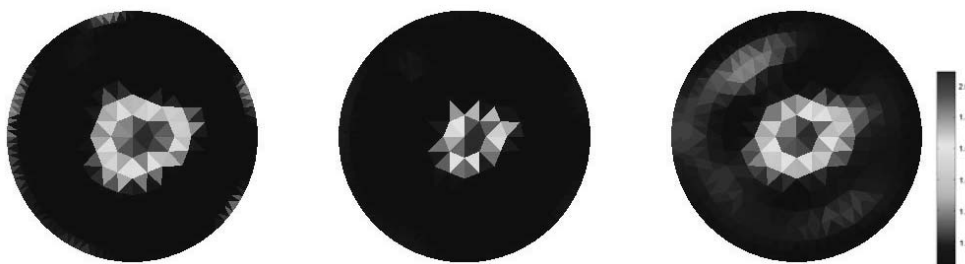
Nominalna średnica wewnętrzna sensora to 6 cali (sensor był wyprodukowany oryginalnie w systemie imperialnym), czyli nieco ponad 150 mm. Zdjęcie czujnika z boku jest pokazane na rysunku 1a, natomiast widok z góry jest przedstawiony na rysunku 2.

4. Wyniki badań

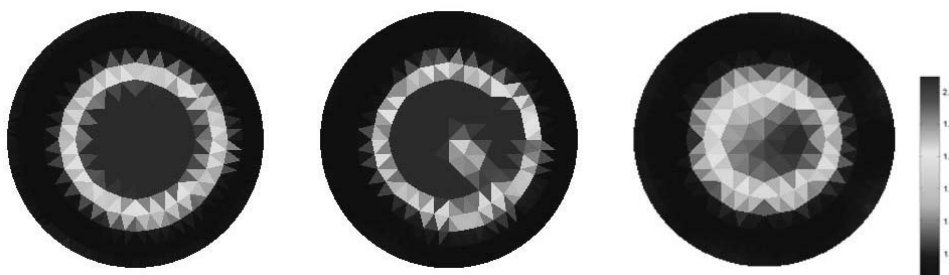
Reprezentację niektórych z szerokiej gamy wyników otrzymanych za pomocą opisanych wcześniej metod autorzy przedstawili poniżej. Wybór wyników został tak dobrany, aby możliwie najlepiej przedstawić przeprowadzone eksperymenty. Przedstawione wyniki dotyczą eksperymentów kolejno z:

- jednym fantomem o relatywnie małym przekroju w stosunku do przestrzeni pomiarowej (20/150); badany materiał to szkło (rys. 3);
- jednym fantomem o większym niż poprzedni fantom przekroju w stosunku do przestrzeni pomiarowej (80/150); badany materiał to plastik (rys. 4);
- dwoma powyższymi fantomami umieszczonymi jednocześnie w przestrzeni pomiarowej (20/150 i 80/150); fantomy wypełnione szkłem (rys. 5);
- dwoma powyższymi fantomami umieszczonymi jednocześnie w przestrzeni pomiarowej; fantomy są puste, natomiast pozostała przestrzeń wypełniona plastikiem (20/150 i 80/150) (rys. 6);
- trzema fantomami umieszczonymi jednocześnie w przestrzeni pomiarowej (20/150, 40/150, 80/150); fantomy wypełnione szkłem (rys. 7 i rys. 8).

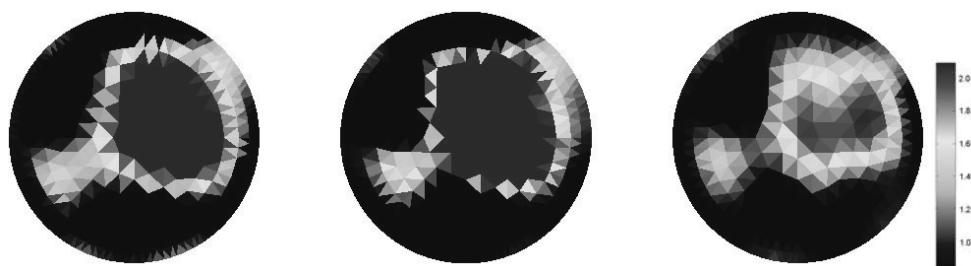
Rysunki pokazują wyniki otrzymane dla metod: SIRT [4], Gaussa-Newtona (G-N) [3] i Mrf [1, 7].



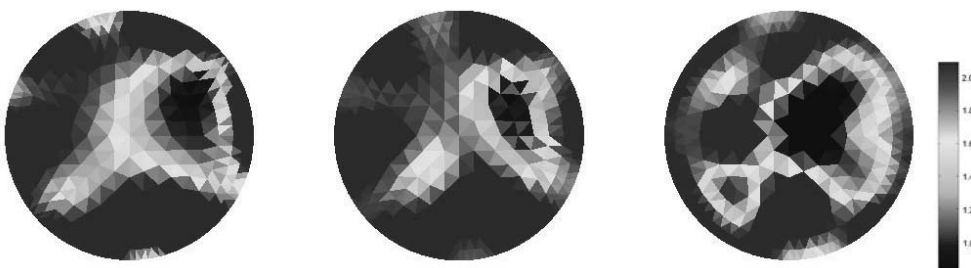
Rys. 3. Obraz tomograficzny zrekonstruowany: a) metoda SIRT (problem prosty rozwiązywany w sposób liniowy); b) metoda SIRT (problem prosty rozwiązywany w sposób nieliniowy); c) metoda Gaussa-Newtona



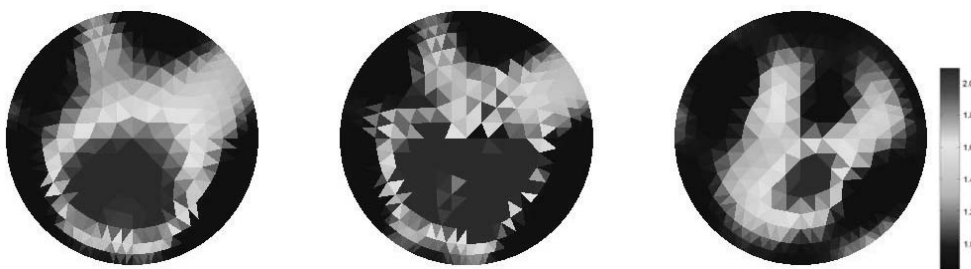
Rys. 4. Obraz tomograficzny zrekonstruowany: a) metoda SIRT (problem prosty rozwiązywany w sposób liniowy); b) metoda SIRT (problem prosty rozwiązywany w sposób nieliniowy); c) metoda Gaussa-Newtona



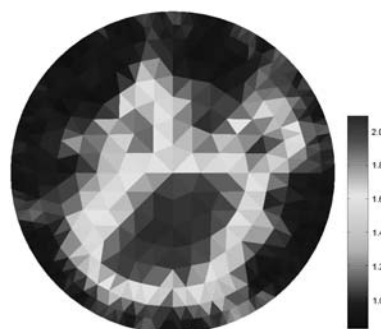
Rys. 5. Obraz tomograficzny zrekonstruowany: a) metoda SIRT (problem prosty rozwiązywany w sposób liniowy); b) metoda SIRT (problem prosty rozwiązywany w sposób nieliniowy); c) metoda Gaussa–Newtona



Rys. 6. Obraz tomograficzny zrekonstruowany: a) metoda SIRT (problem prosty rozwiązywany w sposób liniowy); b) metoda SIRT (problem prosty rozwiązywany w sposób nieliniowy); c) metoda Gaussa–Newtona



Rys. 7. Obraz tomograficzny zrekonstruowany: a) metoda SIRT (problem prosty rozwiązywany w sposób liniowy); b) metoda SIRT (problem prosty rozwiązywany w sposób nieliniowy); c) metoda Gaussa–Newtona



Rys. 8. Modelowanie przestrzenne Mrf dla 3 obiektów znajdujących się wewnątrz tomografu

Należy podkreślić, że uzyskane wyniki nie mają na celu pokazanie lepszych algorytmów rekonstrukcji obrazu od opracowywanych w świecie nauki. Celem natomiast jest porównanie różnych podejść stosowanych do rozwiązania problemu odwrotnego mających miejsce przy rekonstrukcji obrazów, począwszy od prostej linowej projekcji wstecznej, przez algorytmy iteracyjne: SIRT z liniowym i nieliniowym rozwiązaniem problemu prostego i metodę regularyzacji w metodzie Gaussa–Newtona do przestrzennego modelowania metodą Mrf. Jak widać z wyników, zastosowana siatka składająca się z 704 elementów jest również niewystarczająca. Ta sama siatka użyta została dla problemu prostego i odwrotnego. Należałoby również zastosować dokładniejsze modelowanie tomografu, choćby poprzez zamodelowanie 3D elektrod. Zastosowana metoda elementów skończonych dotyczyła tylko wnętrza obszaru tomografu. Poprawę obrazu można również uzyskać poprzez odpowiednią segmentację obrazu. Zastosowanie tej techniki pozwoliłoby zapewne otrzymanie ostrych krawędzi obiektów. Jest oczywiste, że lepsze wyniki uzyskujemy dla metod iteracyjnych i tam, gdzie nie ma uproszczenia nieliniowego problemu prostego do liniowego. Kolejną poprawę wyników, możemy zaobserwować, stosując nieliniowe rozwiązanie problemu odwrotnego poprzez uaktualnienie macierzy czułości w każdej iteracji (dla każdego nowego oszacowania rozkładu stałej dielektrycznej wewnątrz tomografu). Ma to miejsce dla metody Gaussa–Newtona.

5. Podsumowanie

Używane na szeroką skalę algorytmy rekonstrukcji obrazów 2D nie są jednak dokładne i nie potrafią wydobyć z danych pomiarowych wszystkich napływających informacji o badanym procesie przemysłowym. Rozwiązanie problemu odwrotnego, które ma miejsce podczas rekonstrukcji obrazu tomograficznego, polega na znalezieniu rozkładu szukanego parametru na podstawie dokonanego pomiaru. W przypadku tomografii pojemnościowej problem ten jest zarówno źle postawiony, jak i nieliniowy, co powoduje dodatkową trudność. Rozwiązując taki problem można użyć technik regularyzacji, co jednak powoduje efekt rozmycia w zrekonstruowanym obrazie tomograficznym. Zaprezentowane wyniki po-

kazują nową metodę zobrazowania w przestrzeni dwuwymiarowej materiału w zamkniętym naczyniu, przy wykorzystaniu Mrf. Mimo pojawiającego się również efektu rozmycia, wyniki uzyskane za pomocą tej metody są stosunkowo najlepsze, co widać na przykładzie z rysunku 8. Zaletą jest również możliwość oszacowania błędu rozwiązania bez potrzeby porównania z prawdziwym rozkładem materiału, który nie zawsze jest znany.

Podziękowania

Autorzy dziękują EPSRC za możliwość wykonania badań w ramach grantu nr: Ref. GR/R22148/01 „Spatial and temporal modelling for ECT”.

Literatura

- [1] Gilks W.R., Richardson S., Spiegelhalter D.J.: *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. London, UK, Chapman & Hall 1996
- [2] Grudzień K., Romanowski A.: *Wizualizacja przepływu materiałów stałych w hoperach*. Półrocznik AGH Automatyka, t. 8, z. 3, 2004, 401–408
- [3] Lionheart W.R.B.: *Review: Developments in EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments*. *Physiol. Meas.*, 25, 2004, 125–142
- [4] Liu S., Fu L., Yang W.Q.: *Comparison of Three Image Reconstruction Algorithms for Electrical Capacitance Tomography*. 2nd World Congress on Industrial Process Tomography, Hannover, Germany, 2001
- [5] Maxwell J.C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism, vol. I*. Oxford, Clarendon Press 1873
- [6] Romanowski A., Grudzień K., Aykroyd R.G., Sankowski D.: *Application of the Bayesian/MCMC approach to investigation of the phenomena present in multiphase processes*. *Bulletin DE LA SOCIETE DES SCIENCES ET DES LETTERS DE LÓDŹ*, vol. LIV, 2004, 31–44.
- [7] Winkler G.: *Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo: A Mathematical Introduction*. 2nd ed., Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag 2003