

Krzysztof Oprzędkiewicz\*

## Regulator PID dla pewnej klasy systemów dynamicznych liniowych o niepewnych parametrach

### 1. Uwagi wstępne

Systemy dynamiczne, których parametry nie są dokładnie znane, lecz mogą być określone tylko z pewną określoną dokładnością, opisywane są z wykorzystaniem wielu różnych technik. Zaliczamy tu np. zbiory rozmyte, modele statystyczne, jak też modele wykorzystujące teorię liczb przedziałowych.

W niniejszej pracy przedstawiono analizę układu sterowania liniowego systemu skończonego wymiarowego o niepewnych parametrach (z niepewnością parametryczną) z wykorzystaniem typowego regulatora PID.

W szczególności omówiono następujące zagadnienia:

- system III rzędu o niepewnych parametrach;
- uwagi o stabilności układu;
- dostrojenie regulatora PID do obiektu metodą Zieglera–Nicholsa;
- badania symulacyjne z wykorzystaniem pakietu MATLAB/SIMULINK;
- przykład.

### 2. Obiekt III rzędu o niepewnych parametrach

Rozważmy układ III rzędu opisany transmitancją operatorową

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (1)$$

gdzie:

$$L(s) = w_3(q)s^3 + w_2(q)s^2 + \dots + w_1(q)s + w_0(q) \quad (2)$$

$$M(s) = v_3(q)s^3 + v_2(q)s^2 + \dots + v_1(q)s + v_0(q) \quad (3)$$

---

\* Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie; kop@uci.agh.edu.pl

Współczynniki wielomianów (2)–(3) są liniowymi funkcjami niepewnych parametrów modelu. Są one opisane następująco:

$$w_i(q) = c_{1i}q_1 + c_{2i}q_2 + c_{3i} \quad v_i(q) = d_{1i}q_1 + d_{2i}q_2 + d_{3i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

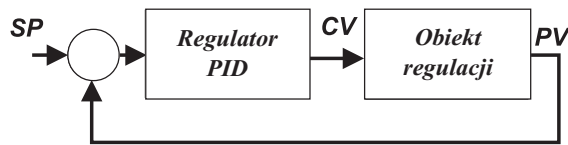
Wektor niepewnych parametrów modelu  $q$  może być zapisany następująco:  $q = [q_1, q_2]^T$ ,  $q \in Q$ , gdzie  $Q$  oznacza cały obszar niepewnych parametrów. Elementy wektora  $q$  są liczbami przedziałowymi:

$$q_1 = [q_1, \bar{q}_1] \quad (5)$$

$$q_2 = [q_2, \bar{q}_2] \quad (6)$$

### 3. Układ sterowania rozważanego obiektu z regulatorem PID

Dla systemu opisanego powyżej rozważmy układ regulacji pokazany na rysunku 1.



Rys. 1. Zamknięty układ regulacji

Do stabilizacji systemu został zastosowany typowy regulator PID określony następująco:

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (7)$$

$$q_2 = [q_2, \bar{q}_2]$$

$$G_r(s) = k_r + \frac{\alpha}{s} + \beta s = \frac{\beta s^2 + ks + \alpha}{s}$$

gdzie:

- $k_r$  – wzmacnienie regulatora,
- $\alpha$  – stała całkowania,
- $\beta$  – stała różniczkowania.

Oznaczmy wektor nastaw regulatora przez  $r = [k, \alpha, \beta]$ . Następnie założmy, że parametry regulatora mogą się zmieniać w pewnych zakresach, zdeterminowanych przez techniczną realizację regulatora i budują one przestrzeń nastaw  $R$  zdefiniowaną następująco:

$$R = \{r \in \mathbb{R}^3 : r = [k_r, \alpha, \beta]^T, k_{\min} \leq k \leq k_{\max}, \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max}\} \quad (8)$$

Dla celów dalszej analizy nastawy regulatora mogą być interpretowane również jako liczby przedziałowe:

$$\begin{cases} k_r = [k_{\min}, k_{\max}] \\ \alpha = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \\ \beta = [\beta_{\min}, \beta_{\max}] \end{cases} \quad (9)$$

Transmitancja układu zamkniętego z rysunku 1 jest równa

$$G_z(s) = \frac{f_5(q, r)s^5 + f_4(q, r)s^4 + f_3(q, r)s^3 + f_2(q, r)s^2 + f_1(q, r)s + f_0(q, r)}{h_5(q, r)s^5 + h_4(q, r)s^4 + h_3(q, r)s^3 + h_2(q, r)s^2 + h_1(q, r)s + h_0(q, r)} \quad (10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_5(q, r) &= \beta w_3(q), \\ f_4(q, r) &= \beta w_2(q) + k_r w_3(q) + v_3(q), \\ f_3(q, r) &= \beta w_1(q) + k_r w_2(q) + \alpha w_3(q), \\ f_2(q, r) &= \beta w_0 + k_r w_1(q) + \alpha w_2(q), \\ f_1(q, r) &= k_r w_0(q) + \alpha w_1(q), \\ f_0(q, r) &= \alpha w_0(q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_5(q, r) &= \beta w_3(q), \\ h_4(q, r) &= \beta w_2(q) + k_r w_3(q) + v_3(q), \\ h_3(q, r) &= \beta s_1(q) + k_r w_2(q) + \alpha w_3(q) + v_2(q), \\ h_2(q, r) &= \beta w_0(q) + k_r w_1(q) + \alpha w_2(q) + v_1(q), \\ h_1(q, r) &= k_r w_0(q) + \alpha w_1(q) + v_0(q), \\ h_0(q, r) &= \alpha w_0(q). \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli współczynniki  $w_i(q)$  oraz  $v_i(q)$  określone przez (4) są liniowymi funkcjami niepewnych parametrów  $q_1$  i  $q_2$ , to współczynniki  $f_i(q, r)$  oraz  $h_i(q, r)$  są również liniowymi funkcjami tych parametrów.

Oznaczmy wielomian charakterystyczny układu zamkniętego przez  $W$ . Wielomian ten jest funkcją zmiennej zespolonej  $s$  oraz niepewnych parametrów układu sterowania, co można zapisać następująco

$$W(s, q, r) = h_5(q, r)s^5 + h_4(q, r)s^4 + h_3(q, r)s^3 + h_2(q, r)s^2 + h_1(q, r)s + h_0(q, r) \quad (11)$$

Stabilność układu sterowania rozważanego w pracy jest zdeterminowana przez wielomian (11).

W dalszej części pracy zostanie przedstawiona jej analiza.

#### 4. Uwagi o stabilności układu

W przypadku rozważanego systemu o niepewnych parametrach analiza stabilności będzie ułatwiona po wprowadzeniu pewnych nowych pojęć.

Na początku zauważmy, że w przypadku układu sterowania pokazanego na rysunku 1 stabilność jest funkcją zarówno niepewnych parametrów obiektu opisanych przez wektor  $q \in Q$ , jak i nastaw regulatora  $r \in R$ . Oznaczmy teraz uogólnioną przestrzeń parametrów układu regulacji poprzez  $P$ , a wektory składowe tej przestrzeni poprzez  $p$ . Jest ona zdefiniowana następująco

$$P = Q \times R = \{p = q \times r \in \mathbb{R}^5 : q \in Q, r \in R\} \quad (12)$$

Ze względu na typ ograniczeń na poszczególne składowe, zbiór  $P$  może być interpretowany jako hipersześcian w przestrzeni  $\mathbb{R}^5$ . Hipersześcian ten ma  $2^5 = 32$  wierzchołki. Są one zdefiniowane następująco:

$$\begin{cases} P_1^v = [q_1, q_2] \times [k_{\min}, \alpha_{\min}, \beta_{\min}] \\ \dots \\ P_{32}^v = [\bar{q}_1, \bar{q}_2] \times [k_{\max}, \alpha_{\max}, \beta_{\max}] \end{cases} \quad (13)$$

Współczynniki transmitancji układu zamkniętego  $f$  i  $h$  są funkcjami uogólnionego wektora parametrów systemu  $p$ :

$$\begin{aligned} f_i(q, r) &= f_i(p), \quad i = 0, \dots, 3, \\ h_i(q, r) &= f_i(p), \quad i = 0, \dots, 3 \end{aligned}$$

i w konsekwencji wielomian charakterystyczny układu zamkniętego, zdefiniowany przez (11) również jest funkcją wektora  $p$

$$W(s, q, r) = W(s, p) \quad (14)$$

Dla wielomianu (16) można zdefiniować wielomiany wierzchołkowe, (związane z poszczególnymi wierzchołkami) w następujący sposób:

$$\begin{cases} W_1^v(s, p) = W(s, P_1^v) \\ \dots \\ W_{32}^v(s, p) = W(s, P_{32}^v) \end{cases} \quad (15)$$

Następnie możemy zauważyć, że w obrębie zbioru parametrów układu sterowania  $P$  można oczekiwać podzbiorów, w których system sterowania opisany przez wektor param-

trów  $p$  będzie stabilny oraz podzbiorów, w których system nie będzie stabilny. Oznaczmy obszary stabilności przez  $P_s$ , a obszary niestabilności przez  $P_{ns}$ . Obszary te posiadają następujące elementarne własności:

$$P_s \cup P_{ns} = P \quad P_s \cap P_{ns} = \emptyset \quad (16)$$

W rozważanym przypadku informację o stabilności systemu daje nam wyznaczenie lub oszacowanie obszarów stabilności i niestabilności w obrębie zbioru  $P$ .

Zagadnienie stabilności układów o niepewnych parametrach, a w szczególności systemów przedziałowych było przedmiotem badań wielu Autorów. Najbardziej typowym podejściem jest zastosowanie twierdzenia Charitonova (zob [8]). Przy zastosowaniu tego twierdzenia stabilność systemu przedziałowego szacowana jest na podstawie stabilności systemów wierzchołkowych. Na podstawie twierdzenia Charitonova można sformułować następującą uwagę dotyczącą stabilności układu opisanego przez (10) w obszarze parametrów  $P$ . Będzie ona sformułowana na podstawie ogólnego warunku koniecznego stabilności systemu liniowego o zadanej transmitancji.

#### Uwaga 1

Załóżmy, że:

- rozważamy zamknięty układ regulacji, którego transmitancja ma postać (7);
- współczynniki wielomianu charakterystycznego układu są liniowymi funkcjami parametrów systemu opisanych przez  $p$ ;
- przestrzeń parametrów układu regulacji jest hipersześcianem w przestrzeni  $\mathbb{R}^5$  opisanym przez (12) i (13);
- wielomian charakterystyczny systemu jest zdefiniowany przez (11), a jego wielomiany wierzchołkowe, związane z poszczególnymi wierzchołkami hipersześcianu  $P$  są zdefiniowane przez (15).

Następujące warunki konieczne stabilności układy zamkniętego opisanego przez (7) są sobie równoważne:

- współczynniki wszystkich wielomianów wierzchołkowych (15) są tego samego znaku,
- żaden z wielomianów  $h_0-h_5$  nie posiada pierwiastków wewnątrz hipersześcianu  $P$ ,
- wszystkie współrzędne wszystkich wierzchołków hipersześcianu  $P$  są tego samego znaku.

Powyższą uwagę można udowodnić wprost na podstawie warunku koniecznego stabilności systemu liniowego o znanych parametrach. Warunki w niej sformułowane mogą być łatwo sprawdzone numerycznie dla konkretnych liczbowych wartości niepewnych parametrów obiektu. Warunek konieczny i wystarczający stabilności rozważanego układu regulacji może być sformułowany z użyciem znanych metod badania stabilności systemów przedziałowych, np. twierdzenia Charitonova, lub też z wykorzystaniem klasycznych metod badania stabilności systemów liniowych o znanych parametrach.

Do sprawdzenia stabilności systemów wierzchołkowych można wykorzystać kryterium Hurwitza zastosowane do wielomianu (11). Wyznacznik Hurwitza jest w rozważanym wypadku funkcją uogólnionego wektora parametrów systemu  $p$  i ma w rozważanym wypadku następującą postać

$$H_5(p) = \begin{bmatrix} h_4(p) & h_2(p) & h_0(p) & 0 & 0 \\ h_5(p) & h_3(p) & h_1(p) & 0 & 0 \\ 0 & h_4(p) & h_2(p) & h_0(p) & 0 \\ 0 & h_5(p) & h_3(p) & h_1(p) & 0 \\ 0 & 0 & h_4(p) & h_2(p) & h_0(p) \end{bmatrix}_{5 \times 5} \quad (17)$$

a jego kolejne podwyznaczniki są równe:

$$H_4(p) = \begin{bmatrix} h_4(p) & h_2(p) & h_0(p) & 0 \\ h_5(p) & h_3(p) & h_1(p) & 0 \\ 0 & h_4(p) & h_2(p) & h_0(p) \\ 0 & h_5(p) & h_3(p) & h_1(p) \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (18)$$

$$H_3(p) = \begin{bmatrix} h_4(p) & h_2(p) & h_0(p) \\ h_5(p) & h_3(p) & h_1(p) \\ 0 & h_4(p) & h_2(p) \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (19)$$

$$H_2(p) = \begin{bmatrix} h_4(p) & h_2(p) \\ h_5(p) & h_3(p) \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (20)$$

$$H_1(p) = [h_4(p)]_{1 \times 1} \quad (21)$$

Przy czym – parametry  $h_0(p)$ – $h_5(p)$  są funkcjami parametrów układu sterowania zapisanych w wektorze  $p$ . Jak wiadomo z kryterium Hurwitza, warunkiem stabilności systemu jest to, aby wszystkie wyznaczniki (11)–(21) były dodatnie. Warunki te muszą być sprawdzone dla wszystkich wielomianów wierzchołkowych (15) zgodnie z twierdzeniem Charitonova. Jeżeli wszystkie wielomiany wierzchołkowe są stabilne, to system przedziałowy będzie również stabilny.

Powyższe rozważania możemy zebrać w postaci następującej uwagi:

### Uwaga 2

Założmy że:

- rozważamy zamknięty układ sterowania pokazany na rysunku 1 dla obiektu o niepewnych parametrach opisanego przez (1)–(6);
- spełniony jest warunek konieczny stabilności sformułowany w twierdzeniu 1.

Jeżeli powyższe założenia są spełnione, to następujące warunki są sobie równoważne:

- rozważany system o niepewnych parametrach jest stabilny w całym obszarze parametrów  $P$ ;

- Obszar niestabilności  $P_{ns}$  jest zbiorem pustym i obszar stabilności jest równy uogólnionemu obszarowi parametrów:  $P_{ns} = P$ ;
- Wszystkie wielomiany wierzchołkowe  $W_1^v(s, p) - W_{32}^v(s, p)$  zdefiniowane przez (15) są stabilne.

Powyższa uwaga wynika wprost z twierdzenia Charitonova. Może ona być łatwo sprawdzona numerycznie dla zadanych systemów wierzchołkowych (będzie to pokazane na przykładzie).

Natomiast w przypadku rozważanego układu regulacji dla systemu o niepewnych parametrach z niepewnością parametryczną sprawdzenie stabilności systemu z wykorzystaniem twierdzenia Charitonova nie zawsze daje pełną informację o stabilności. Taka sytuacja ma miejsce, jeżeli na podstawie warunków z twierdzenia Charitonova układ nie jest stabilny. W takiej sytuacji w rozważanym przypadku można oczekiwać, że w obrębie obszaru  $P$  wystąpią i obszary stabilności, i obszary niestabilności.

Ogólna relacja na obszary stabilności i niestabilności dla rozważanego układu regulacji może być w rozważanym wypadku zapisana następująco:

$$\begin{cases} P_{ns} = \{p \in P : H_1(p) < 0 \vee \dots \vee H_5(p) < 0\} \\ P_s = \{p \in P : H_1(p) > 0 \vee \dots \vee H_5(p) > 0\} \end{cases} \quad (22)$$

Powyższy warunek może być wykorzystany do numerycznego oszacowania obszarów stabilności i niestabilności, co zostanie pokazane na przykładzie.

## 5. Dostrajanie regulatora do obiektu metodą Zieglera–Nicholsa

Metoda Zieglera i Nicholasa zarówno w wersji klasycznej, jak i przekąźnikowej, jest jedną z najczęściej stosowanych w praktyce przemysłowej metod dostrajania regulatorów PID. Dostrojenie regulatora PID tą metodą wymaga wyznaczenia wzmocnienia krytycznego obiektu i okresu oscylacji na wyjściu układu regulacji na granicy stabilności, przy czym granica stabilności jest najczęściej wyznaczana doświadczalnie. Może ona też być wyznaczona analitycznie w sytuacji, gdy znana jest transmitancja obiektu. W rozważanym wypadku do jej wyznaczenia wykorzystamy kryterium Nyquista. Transmitancja widmowa układu otwartego na granicy stabilności jest w rozważanym wypadku równa

$$G_o(j\omega, q) = k_{kr} G(j\omega) = k_{kr} \frac{w_3(q)(j\omega)^3 + w_2(q)(j\omega)^2 + w_1(q)(j\omega) + w_0(q)}{v_3(q)(j\omega)^3 + v_2(q)(j\omega)^2 + v_1(q)(j\omega) + v_0(q)} \quad (23)$$

Ma podstawie relacji (23) można wyznaczyć wartości wzmocnienia krytycznego i okresu oscylacji nietłumionych na wyjściu układu metodami analitycznymi lub numerycz-

nymi (dla podanych wartości liczbowych parametrów obiektu). Ogólne wyniki analityczne są dość złożone, a prostsze są możliwe do uzyskania dla przypadków szczególnych.

Jednym z przypadków szczególnych jest sytuacja, gdy transmitancja (1) nie posiada zer. Przypadek ten opisuje dużą klasę rzeczywistych obiektów regulacji, spotykanych w praktyce przemysłowej (obiekty inercyjne III rzędu). W tym wypadku transmitancja widmowa (23) redukuje się do prostszej postaci

$$G_o(j\omega, q) = k_{kr}G(j\omega) = k_{kr} \frac{w_0(q)}{v_3(q)(j\omega)^3 + v_2(q)(j\omega)^2 + v_1(q)(j\omega) + v_0(q)} \quad (24)$$

Dla transmitancji (24) możliwe jest podanie prostych wzorów analitycznych na wzmocnienie krytyczne  $k_{kr}$  i okres oscylacji nietłumionych  $T_{osc}$ . Są one równe:

$$T_{osc}(q) = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{v_1(q)}{v_3(q)}}} \quad K_{kryt}(q) = \frac{v_1(q)v_2(q) - v_0(q)v_3(q)}{w_0(q)v_3(q)} \quad (25)$$

W tym przypadku nastawy regulatora PID można wyznaczyć na podstawie znanych wzorów Zieglera–Nicholsa:

$$\begin{cases} k_r(q) = 0,6k_{kryt}(q) \\ \alpha(q) = \frac{k_r(q)}{T_i(q)} = \frac{k_r(q)}{0,5T_{osc}(q)} \\ \beta(q) = k_r(q)T_d(q) = 0,125k_r(q)T_{osc}(q) \end{cases} \quad (26)$$

W rozważanym wypadku należy zwrócić uwagę, że nastawy regulatora są nieliniowymi funkcjami niepewnych parametrów obiektu oraz że na nastawy są nałożone ograniczenia (8), wynikające z technicznej realizacji regulatora. Jeżeli do wyznaczania nastaw wg relacji (25) i (26) wykorzystany wierzchołkowe (lub ogólniej – brzegowe) wartości niepewnych parametrów systemu  $q$ , to otrzymamy zbiór nastaw regulatora gwarantujących poprawną pracę układu regulacji dla wszystkich wartości niepewnych parametrów obiektu. Oznaczmy ten zbiór przez  $R_{ZN}$ . Może on być zdefiniowany następująco

$$R_{ZN} = \{r_{ZN}(q) \in \mathbb{R}^3 : r_{ZN}(q) = [k_r(q), \alpha(q), \beta(q)]\} \quad (27)$$

Następnie można zauważyć, że zbiór nastaw regulatora dopuszczalny zarówno ze względu na możliwość technicznej realizacji, jak i ze względu na poprawność działania układu będzie częścią wspólną zbiorów  $R$  i  $R_{ZN}$ . Jeżeli oznaczymy ten zbiór poprzez  $R_d$ , to może on być opisany następująco;  $R_d = R_{ZN} \cap R$ .



W rozważanym wypadku należy oczekiwać, że dobór nastaw regulatora należących do zbioru  $R_d$  zapewni poprawne działanie układu regulacji dla każdej wartości niepewnych parametrów obiektu, zapisanych jako wektor  $q$ .

## 6. Przykład

Jako przykład rozważmy układ regulacji złożony z obiektu o transmitancji (1), dla której:

$$\begin{cases} w_3(q) = 0,0 \\ w_2(q) = 0,0 \\ w_1(q) = 0,0 \\ w_0(q) = 0,5q_1 + 0,5q_2 + 0,25 \\ v_3(q) = 5000q_1 + 5000q_2 + 764,58 \\ v_2(q) = 700q_1 + 700q_2 + 62,58 \\ v_1(q) = 30q_1 + 30q_2 + 6,24 \\ v_3(q) = 5000q_1 + 5000q_2 + 764,58 \\ v_0(q) = 0,5q_1 + 0,5q_2 \end{cases} \quad (28)$$

Przestrzeń niepewnych parametrów  $Q$  budowana jest przez następujący układ wektorów  $q = [q_1, q_2]^T$ , gdzie:

$$q_1 = [0,7; 1,3],$$

$$q_2 = [0,7; 1,3].$$

Do sterowania obiektem zastosowano regulator PID, na którego nastawy są nałożone następujące ograniczenia, wynikające z jego technicznej realizacji:

$$\begin{cases} 0,5 \leq k_r \leq 10,00 \\ 0,01 \leq \alpha \leq 0,10 \\ 0,0 \leq \beta \leq 40,0 \end{cases} \quad (29)$$

czyli przestrzeń nastaw regulatora  $R$  ma w rozważanym wypadku postać następującą:

$$R = \{r \in \mathbb{R}^3 : r = [k_r, \alpha, \beta]^T, 0,5 \leq k_r \leq 10,00; 0,01 \leq \alpha \leq 0,10; 0,0 \leq \beta \leq 40,0\}.$$

Uogólniony obszar niepewnych parametrów jest w rozważanym wypadku hipersześcianem zdefiniowanym następująco

$$P = \{p \in \mathbb{R}^5, p = q \times r\}.$$

Dla powyższego systemu opisanego przez  $P_1$  dokonujemy sprawdzenia warunków stabilności zgodnie z twierdzenia Charitonova, i przy wykorzystaniu kryterium Hurwitza. Okazuje się, że wszystkie systemy wierzchołkowe są w rozważanym wypadku stabilne, co pozwala na sformułowanie wniosku, że rozważany system jest stabilny w całym obszarze niepewnych parametrów dla dowolnych nastaw regulatora PID z zadanego zakresu.

Teraz załóżmy, że do celów sterowania rozważanego systemu wyznaczamy zakres nastaw gwarantujących poprawną pracę układu z wykorzystaniem metody Zieglera–Nicholsa i relacji (25) i (26). Brzegowe wartości tych nastaw są w rozważanym wypadku następujące:

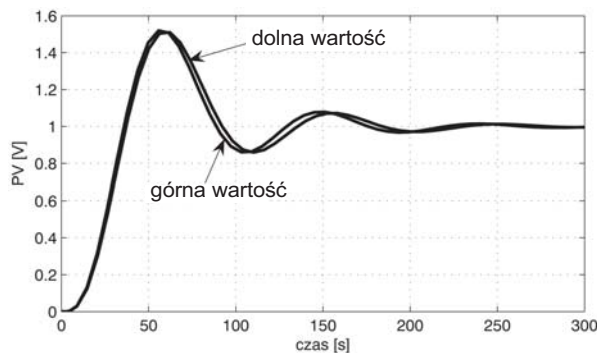
$$\begin{cases} k_r([0, 7; 0, 7]) = 3,6489 \\ \alpha([0, 7; 0, 7]) = 0,0915 \\ \beta([0, 7; 0, 7]) = 36,3583 \end{cases} \quad \begin{cases} k_r([1, 3; 0, 7]) = 3,8400, \\ \alpha([1, 3; 0, 7]) = 0,0959, \\ \beta([1, 3; 0, 7]) = 38,4468, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_r([0, 7; 1, 3]) = 3,8400 \\ \alpha([0, 7; 1, 3]) = 0,0959 \\ \beta([0, 7; 1, 3]) = 38,4468 \end{cases} \quad \begin{cases} k_r([1, 3; 1, 3]) = 3,9567, \\ \alpha([1, 3; 1, 3]) = 0,0985, \\ \beta([1, 3; 1, 3]) = 39,7234. \end{cases}$$

Na podstawie powyższych danych możemy zdefiniować zbiór  $R_{ZN}$  dla rozważanego przypadku:

$$R_{ZN} = \{r_{ZN} = [k_r, \alpha, \beta]^T, 3,6489 \leq k_r \leq 3,9567; 0,0915 \leq \alpha \leq 0,0985; 36,3583 \leq \beta \leq 39,7234\}.$$

Można natychmiast zauważyć, że w rozważanym przypadku  $R_{ZN} \subset R$ . Oznacza to, że cały zakres nastaw wyznaczony dla rozważanego systemu metodą Zieglera–Nicholsa może być zrealizowany na użytych w układzie regulatorze. Przykładowe przebiegi odpowiedzi układu regulacji z rysunku 1 na skok wartości zadanej  $SP = 1(t)$  na wejściu układu regulacji dla obu zestawów nastaw brzegowych oraz nominalnych wartości niepewnych parametrów:  $[q_1^n, q_2^n] = [1, 0; 1, 0]$  są podane na rysunku 2.



Rys. 2. Odpowiedzi skokowe układu regulacji dla wyznaczonych nastaw brzegowych regulatora PID

Na podstawie przebiegów z rysunku 2 można stwierdzić od razu, że zakresy nastaw dla zastosowanego w układzie regulatora PID zostały dobrane poprawnie i przebiegi dla różnych zestawów nastaw praktycznie nie różnią się między sobą.

## 7. Uwagi końcowe

Uwagi końcowe do pracy mogą być sformułowane następująco:

- dla systemów o niepewnych parametrach opisanych transmitancją III rzędu można sformułować proste warunki stabilności bazujące na twierdzeniu Charitonova i kryterium Hurwitza;
- w przypadku gdy system jest opisany transmitancją o postaci (24), możliwe jest proste analityczne wyznaczenie nastaw według reguł Zieglera–Nicholsa;
- przedmiotem dalszych prac autora będzie budowa odpornego regulatora PID dla rozważanego w pracy systemu.

## Literatura

- [1] Barnett S.: *Matrices. Methods and applications*. Oxford, Clarendon Press 1992
- [2] Białas S.: *Odporna stabilność wielomianów i macierzy*. Kraków, UWND AGH 2002
- [3] Busłowicz M.: *Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach*. Białystok, 1997
- [4] Busłowicz M.: *Odporna stabilność systemów dynamicznych liniowych z opóźnieniami*. Warszawa–Białystok, Wyd. Komitet Aut. i Rob. PAN 2000
- [5] Feintuch A.: *Robust Control Theory in Hilbert Space*. Springer, 1998
- [6] Jakubowska M.: *Algorytmy badania stabilności macierzy przedziałowych i ich realizacja numeryczna*. Pólr. AGH Automatyka, vol. 3, No. 2, 1999, 413–430
- [7] Kalmikov S.A., Sokin J.I., Juldasev Z.H.: *Metody intervalnogo analiza*. (ros.) Nauka, 1986
- [8] Kharitonov W.L.: *Ob asymptoticeskoj ustojcivosti polozenija ravnovesija semejstva si stem linejnych differencjalnych uravnenij Diff. Uravnienija*, Vol. 14, No. 11, 1978, 2086–2088 (ros.)
- [9] Klamka J.: *Sterowalność systemów dynamicznych*. PWN, 1990
- [10] Mao X.: *Exponential Stability of Stochastic Delay Interval Systems With Markovian Switching*. IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. 47, No. 10, October 2002, 1064–1612
- [11] Mitkowski W.: *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Warszawa, WNT 1991
- [12] Moorer R.: *Interval Analysis*. Prentice Hall, 1966
- [13] Moore R.: *Methods and Applications of Interwal Analysis*. SIAM Philadelphia 1979
- [14] Oprzędkiewicz K.: *The interval parabolic system*. Arch. of Contr. Scien., Vol. 13, No. 4, 2003, 391–405
- [15] Oprzędkiewicz K.: *A controllability problem for a class of uncertain – parameters linear dynamic systems*. Arch. of Contr. Scien., Vol 14 (L), No. 1, 2004, 85–100

