

Przemysław Korohoda*

Wyznaczanie reprezentacji zastępczej dla dyskretnej filtracji niestacjonarnej – rozważania wstępne**

1. Wprowadzenie

Twierdzenie o splocie [3] definiujące związek między filtracją realizowaną bezpośrednio w dziedzinie Fouriera oraz w dziedzinie pierwotnej – zwanej zwykle dziedziną czasu – stanowi jedno z najbardziej znanych i fundamentalnych twierdzeń z zakresu przetwarzania sygnałów. W myśl tego twierdzenia, jeżeli filtr (zwany też systemem) jest liniowy i stacjonarny, to iloczyn transformaty Fouriera sygnału wejściowego i charakterystyk filtru zdefiniowanych w dziedzinie tej transformaty jest równoważny spłotowi sygnału wejściowego, określonego w dziedzinie pierwotnej i odpowiedzi impulsowej filtru. Charakterystyki (liczba mnoga wynika z faktu, iż najczęściej są to dwie charakterystyki: amplitudowa i fazowa lub rzeczywista i urojona) filtru w dziedzinie transformaty są jednocześnie transformata odpowiedzi impulsowej [3]. Twierdzenie to jest sformułowane zarówno dla dziedziny czasu ciągłego, jak i dla tak zwanego czasu dyskretnego, gdy rolę sygnału pełni ciąg wartości, określony w pewnych – zazwyczaj równoodległych – punktach osi czasu. Jeżeli rolę transformacji pełni dyskretna transformacja Fouriera (DTF) [3], wówczas zarówno dziedziną pierwotną (umownie zwana dziedziną czasu), jak i wtórna (czyli Fouriera, zwana też dziedziną częstotliwości) jest dyskretna i jest jednoznacznie określona przez ciąg indeksów o wartościach od 0 do $N-1$, gdzie N to długość ciągu. DTF przekształca N -elementowy ciąg pierwotny – zwykle o wartościach rzeczywistych – w N -elementowy ciąg transformaty Fouriera – zazwyczaj o wartościach zespolonych. W przypadku DTF i przy przetwarzaniu ciągów o ustalonej długości twierdzenie o splocie jest spełnione dla spłotu kołowego, który może być opisany następującym wzorem

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cdot h(n-m)_N \quad (1)$$

gdzie $x(n)$, $h(n)$ i $y(n)$ to kolejne elementy ciągów: wejściowego, odpowiedzi impulsowej i wyjściowego, a zapis $()_N$ oznacza wartość w nawiasie wziętą modulo N .

* Katedra Elektroniki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

** Praca realizowana w ramach środków AGH na badania własne: 10.10.120.311

W ostatnich kilku dekadach, w miarę wzrostu dostępności i szybkości cyfrowych technik obliczeniowych, rozważania prowadzone na bazie DTF stopniowo zastępowały transformację Fouriera z czasem ciągłym, a filtracja cyfrowa – filtracją analogową. Dlatego też poszukując rozwiązań praktycznych uzasadnione jest poświęcenie uwagi zagadnieniom związanym z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów i odpowiednią wersją twierdzenia o splocie. W przedstawionym opracowaniu zostanie rozważony nietypowy sposób podejścia do filtracji sygnałów z czasem dyskretnym, gdy nie jest spełnione założenie o stacjonarności filtru. Opisane rozwiązanie stanowi element wstępnych rozważań, oferujących kolejne narzędzie wyłonione w trakcie szerszego programu poszukiwań dotyczących możliwych uogólnień i adaptacji powszechnie stosowanych pojęć, wiązanych zwyczajowo z DTF, do innych dyskretnych transformacji [5–10].

Celem stosowania splotu jest zazwyczaj stopniowe realizowanie filtracji, w trakcie napływania danych, natomiast mnożenie transformat jest operacją, za pomocą której wygodnie jest realizować filtrację dla całości danych. Filtracja realizowana splotowo w dziedzinie pierwotnej stanowi zatem narzędzie obliczeniowe zastępujące mnożenie transformat, definiujące zwykle cel filtracji. Rozważając rozmaite problemy praktyczne, wygodnie jest modelować obserwowane zmiany jako filtrację sygnału za pomocą zmiennego w czasie filtru o skończonej odpowiedzi impulsowej [11]. Jednak dopiero odpowiednie podejście syntetyczne może ujawnić istotę obserwowanego procesu. Zadanie to może być wykonane przez filtrację realizowaną komputerowo w dziedzinie transformaty, dla całego ciągu danych. Argumenty powyższe spowodowały, iż autor postanowił zbadać, czy możliwe jest takie przeformułowanie problemu filtracji z wykorzystaniem zmiennych w czasie filtrów o skończonej odpowiedzi impulsowej, iż proces filtracji mógłby być opisany w postaci pojedynczego filtru zdefiniowanego w dziedzinie odpowiednio dobranej transformacji. W poszukiwaniach połączono rozważania dotyczące splotu uogólnionego [1, 2, 5–10], oraz filtracji niestacjonarnej [11].

2. Wyprowadzenie algorytmu

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech \mathbf{A} będzie macierzą transformacji, \mathbf{C} natomiast macierzą splotu uogólnionego [10] (w przypadku DTF jest to macierz splotu kołowego [3, 11]). \mathbf{H} niech oznacza macierz filtru w dziedzinie transformaty. Wektory kolumnowe \mathbf{x} , \mathbf{h} , \mathbf{y} to odpowiednio: sygnał wejściowy, odpowiedź impulsową filtru oraz sygnał wynikający z filtracji. W przypadku filtracji stacjonarnej \mathbf{h} nie zmienia się w czasie i filtracja może być zapisana następująco

$$\mathbf{y} = \mathbf{h} \otimes \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{h}} \circ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \quad (2)$$

gdzie:

- ⊗ – operator splotu uogólnionego [5, 10] (w przypadku DTF jest to splot kołowy),
- – operator iloczynu element-po-elemente,
- ^ – wektor w dziedzinie transformaty.

W przypadku gdy filtr jest stacjonarny, macierz \mathbf{H} jest diagonalna, a kolejne elementy wektora $\hat{\mathbf{h}}$ leżą na linii diagonalnej. Jeżeli dopuścimy zmiany w opisie filtru w dziedzinie pierwotnej – korespondujące ze zmieniającymi się charakterystykami w dziedzinie DTF – wówczas dla każdego indeksu czasowego n wartość wynikowa $y(n)$, będąca n -tą składową wektora \mathbf{y} jest wyliczana z zależności

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{h}_n \otimes \mathbf{x} \quad : \quad y(n) = y_n(n) \quad (3)$$

gdzie dolny indeks n przy wektorach oznacza, że są to wektory zależne od n . Ponieważ rozważamy niestacjonarną filtrację odnoszoną do DTF, zatem macierz \mathbf{C} zawiera w swoich wierszach transponowane, odwrócone tył na przód (zgodnie z zasadami tworzenia macierzy splotu kołowego [3]) i odpowiednio przesunięte cyklicznie wektory \mathbf{h}_n . Łączne zapisanie procesu filtracji dla wszystkich indeksów n prowadzi do równania macierzowego

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} \quad (4)$$

gdzie \mathbf{B} oznacza macierz nowej transformacji zastępczej, spełniającej równanie (4) dla pewnej diagonalnej macierzy \mathbf{H} . Równanie (4) jest spełnione, gdy spełnione są równania

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{H} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1} \quad (5)$$

Można zauważyć, że gdyby po skonstruowaniu nowej macierzy \mathbf{C} zachować tę samą macierz transformacji \mathbf{A} (w tym przypadku jest to macierz DTF), zamiast zastępować ją macierzą \mathbf{B} , to macierz filtru \mathbf{H} nie byłaby już zazwyczaj macierzą diagonalną. Zgodnie z regułami algebry liniowej [4] macierze \mathbf{C} i \mathbf{H} w równaniach (5) są podobne, a w przypadku ortogonalnej macierzy \mathbf{B} – przystające. Oznacza to, że wyznaczenie ortogonalnej macierzy \mathbf{B} spełniającej równanie (5) prowadzi do rozwiązania postawionego problemu, czyli wyznaczenia stacjonarnego filtru zastępczego, jednak przy pewnej transformacji zastępczej – innej niż DTF. Wystarczy zatem wyznaczyć rozwinięcie macierzy \mathbf{C} względem wartości własnych [4]. Wówczas wektor wartości własnych, po uporządkowaniu według malejących wartości modułów, stanowi charakterystykę (zazwyczaj zespoloną) filtru w dziedzinie transformaty, natomiast macierz zawierająca w kolejnych kolumnach ułożone w tym samym, co odpowiednie wartości własne, porządku wektory własne (również zwykle zespolone), to macierz odwrotna do macierzy \mathbf{B} .

Podsumowując: proponowany algorytm jest następujący:

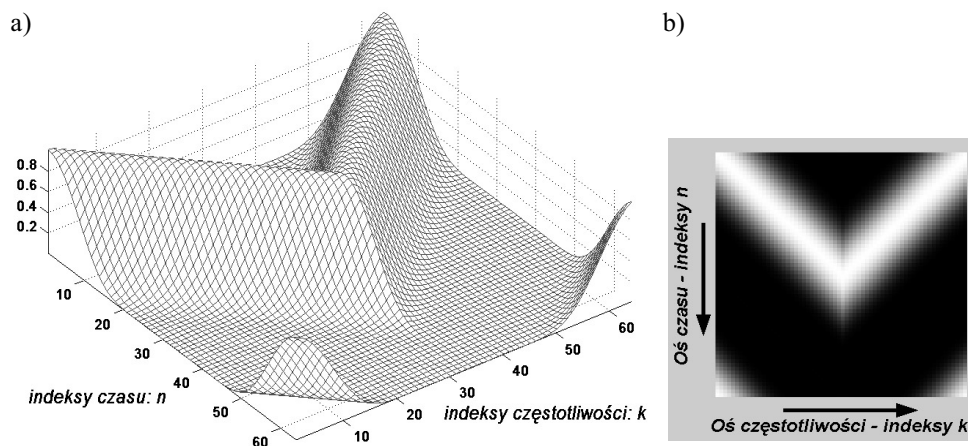
1. Dla niestacjonarnego filtru opisanego zależnym od indeksu n wektorem \mathbf{h}_n , zastępującym odpowiedź impulsową, konstruujemy macierz \mathbf{C} , postępując analogicznie jak przy konstruowaniu macierzy splotu kołowego, gdzie każdy wiersz odpowiada kolejnemu indeksowi n .
2. Wyznaczamy rozwinięcie macierzy \mathbf{C} względem wartości własnych, otrzymując zarówno filtr zastępczy, jak i transformację zastępczą, przy czym filtr ten jest opisany w postaci charakterystyki w dziedzinie tejże transformacji zastępczej.

3. W celu przeniesienia rozważań do dziedziny pierwotnej należy wyznaczyć transformatę odwrotną dla filtru zastępczego, otrzymując jego opis w dziedzinie indeksów n , przy czym proces filtracji w tej dziedzinie opisany jest za pomocą splotu uogólnionego [5–10].

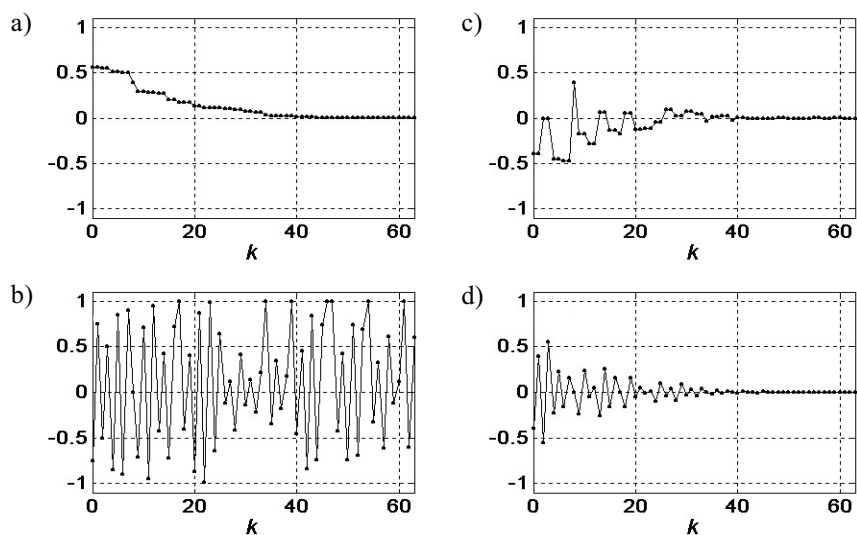
3. Przykłady

Przykład 1

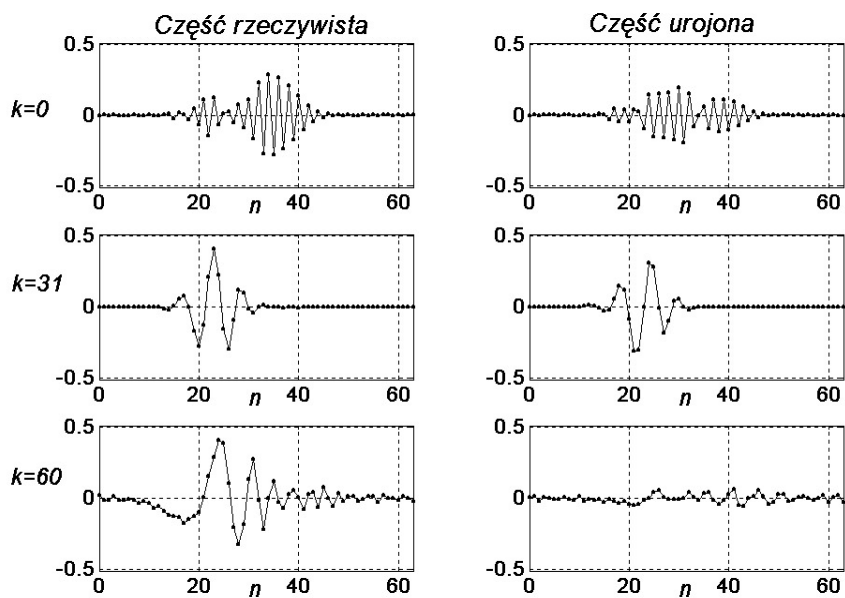
Obliczenia weryfikujące poprawność opisanych rozważań oraz umożliwiające wstępną ocenę właściwości proponowanej metody przeprowadzono z wykorzystaniem pakietu MATLAB, zadając różne warianty zmienności filtru w czasie oraz badając wynik filtracji dla pseudo-losowo generowanych ciągów x . Dla zilustrowania wywodu przyjmijmy, że filtr ma charakterystyki przedstawione na rysunku 1. Przyjęto długość ciągu $N = 64$. Oś n reprezentuje kolejne indeksy czasowe, natomiast oś k indeksy w dziedzinie transformaty Fouriera (czyli DTF). Na rysunku 1 przedstawiono jedynie charakterystyki amplitudowe. Liniowe charakterystyki fazowe były w tym przypadku stałe w czasie, co nie ogranicza ogólności przykładu. Na rysunku 2 pokazano uzyskane charakterystyki filtru zastępczego określone w dziedzinie wyznaczonej transformacji zastępczej. Widać wyraźnie, iż charakterystyki te nie zawierają powtórzeń wskazujących na symetrie, charakterystyczne dla filtrów o rzeczywistych odpowiedziach impulsowych, obserwowanych w dziedzinie DTF. Rysunek 3 przedstawia wybrane ciągi bazowe opisanej macierzą \mathbf{B} transformaty zastępczej. Dla porównania warto przypomnieć, że w przypadku DFT ciągi bazowe, to próbkowane funkcje kosinus (część rzeczywista) oraz sinus (część urojona). W tym przypadku widoczny jest wyraźnie lokalny charakter ciągów bazowych, co może wskazywać na podobieństwo do ciągów odpowiadających filtrom falkowym [12].



Rys. 1. Zmieniające się w czasie (indeksy n) amplitudowe charakterystyki filtru w dziedzinie DTF: w postaci wykresu (a) i w postaci obrazu monochromatycznego (b). Dla $n = 0$ filtr jest dolnoprzepustowy (centralna część indeksów k odpowiada maksymalnym dopuszczalnym częstotliwościom w dziedzinie DTF)



Rys. 2. Charakterystyki filtra zastępczego (przykład 1): a) amplitudowa; b) fazowa (po podzieleniu przez π); c) część rzeczywista; d) część urojona

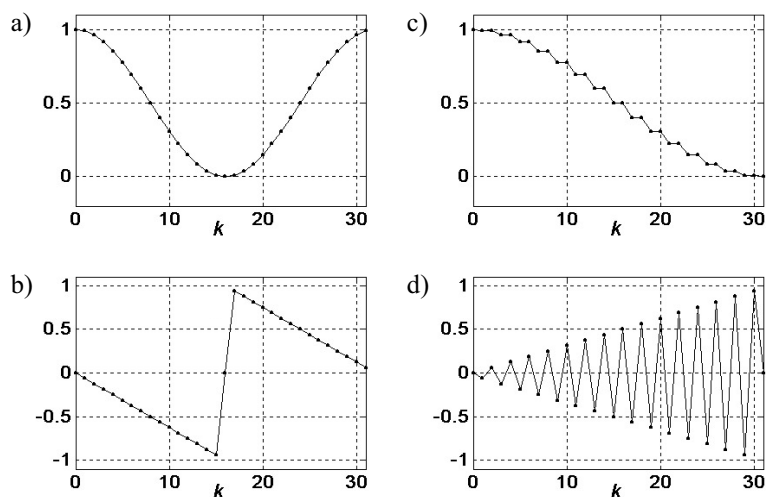


Rys. 3. Wybrane zespolone ciągi bazowe, opisujące wyznaczoną transformację zastępczą dla założonego filtra niestacjonarnego (przykład 1)

Przykład 2

Dla potwierdzenia poprawności proponowanego algorytmu oraz z punktu widzenia kompletności rozważań przyjmijmy, że filtr jest stacjonarny – np. filtr o odpowiedzi impulsowej zawierającej na kolejnych 3 pozycjach wartości: $1/4$, $1/2$ i $1/4$, przy czym $N = 32$.

Rysunek 4 przedstawia charakterystyki filtra w dziedzinie DTF oraz charakterystyki filtra zastępczego w dziedzinie transformacji zastępczej. Widać, iż filtr zastępczy zawiera dokładnie te same elementy, co filtr oryginalny, jedynie przenieumerowane w wyniku porządkowania według malejącego modułu. Taka sama obserwacja dotyczy ciągów bazowych. Należy wspomnieć, iż pomnożenie równania wiążącego dany wektor własny i wartość własną przez -1 zachowuje prawdziwość tego równania [4], co oznacza, że w razie potrzeby można wybrane elementy charakterystyki filtra zastępczego i odpowiadające im ciągi bazowe transformacji zastępczej pomnożyć przez -1 .



Rys. 4. Porównanie charakterystyk założonego filtra stacjonarnego w dziedzinie DTF oraz wyliczonego filtra zastępczego w dziedzinie transformacji zastępczej:

- a) amplituda filtra założonego; b) faza filtra założonego (po podzieleniu przez π);
- c) amplituda filtra zastępczego; d) faza filtra zastępczego (po podzieleniu przez π)

4. Podsumowanie

Należy podkreślić, iż chociaż opisane wyżej rozważania nie należą do powszechnie stosowanego kanonu przetwarzania sygnałów, jednak nie są całkowicie odosobnione, ponieważ pierwsza propozycja wprowadzenia operacji analogicznej do splotu uogólnionego pojawiła się już w [1], a w [2] opisano w ogólnym zarysie, korzystając z odpowiednich równań macierzowych, metodę wyznaczenia współczynników danego filtra w dziedzinie transformaty Walsha. W [11] przeprowadzono obszerne studium zawartości macierzy \mathbf{C} w zastosowaniu do filtracji niestacjonarnej.

Zaproponowane rozwiązanie stanowi wynik prac wstępnych. Kontynuacja rozważań powinna dotyczyć określenia ograniczeń w jego stosowaniu oraz zbadania efektywności i przydatności dla konkretnych zagadnień praktycznych. Prowadzenie rozważań na podstawie splotu uogólnionego – zależności (2) oraz (3) – stwarza możliwość dalszego ich poszerzenia na badanie filtracji niestacjonarnej definiowanej dla transformacji innych niż DFT.

Literatura

- [1] Aizenberg N.N.: *Spectrum of the convolution of the discrete signals in an arbitrary basis*. Doklady Akademii. Nauk SSSR, 241(3), 1978, 551–554 (in Russian)
- [2] Beauchamp K.G.: *Walsh Functions and their Applications*. Academic Press 1975
- [3] Bracewell R.N.: *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill 2000
- [4] Kielbasiński A., Schwetlick H.: *Numeryczna algebra liniowa*. Warszawa, WNT 1992
- [5] Korohoda P., Dąbrowski A.: *Generalized primary domain interpretation of product filtering of digital signals in the transform domain*. Proc. of the IEEE Workshop on Signal Processing, Poznań, 10th October 2003, 75–80
- [6] Korohoda P.: *Odpowiednik pojęcia odpowiedzi impulsowej dla wybranych transformacji dyskretnych*. Półrocznik AGH Automatyka, t. 8, z. 3, 2004, 351–359
- [7] Korohoda P.: *Generalized convolution with windowing in the primary domain*. Proc. of 11th International Workshop on Systems, Signals and Image Processing, Poznań, September 2004, 383–386
- [8] Korohoda P., Dąbrowski A.: *Generalized convolution concept based on DCT*. Proc. of the XII European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Vienna, Austria, Sept. 6–10, 2004, 973–976
- [9] Korohoda P.: *Dyskusja możliwości dostosowania opisu algorytmów filtracji adaptacyjnej do wybranej dyskretnej transformacji*. Półrocznik AGH Automatyka, z. 9, z. 3, 2005, 401–407
- [10] Korohoda P., Dąbrowski A.: *Study on the concept of the generalized convolution*. Elektronika, 4, 2007, 16–20
- [11] Margrave G.F.: *Theory of nonstationary linear filtering in the Fourier domain with application to time-variant filtering*. Geophysics, vol. 63, no. 1, 1998, 244–259
- [12] Vetterli M., Kovacevic J.: *Wavelets and subband coding*. Prentice Hall 1995