AUTOMATYKA • 2011 • Tom 15 • Zeszyt 2

Zbigniew Matuszak*

Przykłady opisu kompozycjami rozkładów czasów zdatności uszkodzeń urządzeń i systemów technicznych

1. Wprowadzenie

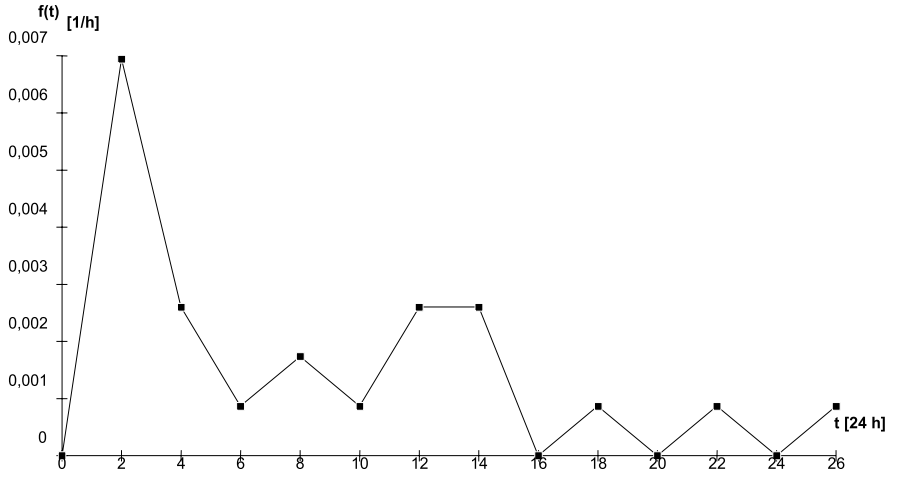
W analizie wyznaczaniu charakterystyk niezawodnościowych złożonych obiektów technicznych towarzyszy poszukiwanie modelu rozkładu czasu zdatności badanego obiektu. Najczęściej jako model rozkładu czasu zdatności obiektu przyjmuje się rozkład wykładniczy, rozkład Weibulla, normalny, logarytmo-normalny, gamma. Niekiedy stosuje się także rozkład potęgowy, gdy czas zdatności obiektu jest ograniczony od góry stałą $b > 0$, a w przypadku bardzo szczegółowej i nietypowej analizy inne, rzadziej stosowane [1, 2, 10, 11].

Przy badaniu dużych, złożonych obiektów technicznych, szczególnie mechatronicznych, może się okazać, że żaden z wymienionych rozkładów nie jest wystarczająco dobrym modelem rozkładu czasu zdatności obiektu. Przyczyną tego jest sumowanie się wielu różnych strumieni uszkodzeń elementów badanego obiektu, z których każdy może mieć zupełnie inne charakterystyki probabilistyczne. W literaturze, m.in. w [1, 2, 10, 11] zaleca się poszerzenie liczby wariantów modeli matematycznych czasu zdatności o *mieszaniny rozkładów* lub *kompozycje rozkładów.*

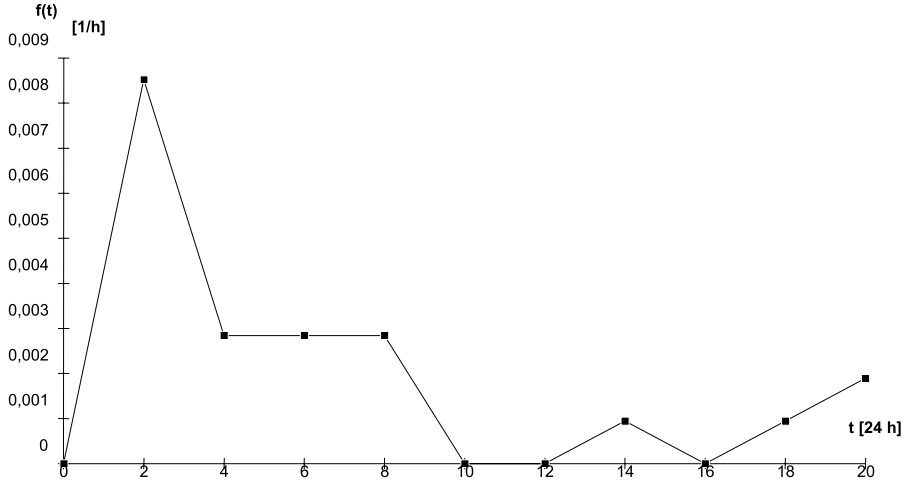
Przykładem celowości takiego postępowania może być porównanie przebiegu empirycznej gęstości prawdopodobieństwa uzyskany w trakcie badań eksploatacyjnych dla instalacji zasilania paliwem i instalacji wody morskiej (rys. 1 i 2) siłowni jednego ze statków grupy Polskiej Żeglugi Morskiej w Szczecinie, z charakterystykami uzyskanymi z eksperymentu symulacyjnego dla mieszaniny dwóch rozkładów (rys. 3) [4, 5, 6].

Jak widać, gęstość prawdopodobieństwa przyjmuje postać dość nieregularną, co daje możliwość dobrania modelu adekwatnego dla rozkładu uzyskanego z badań eksploatacyjnych.

* Akademia Morska w Szczecinie, Instytut Eksploatacji Siłowni Okrętowych



Rys. 1. Charakterystyka gęstości prawdopodobieństwa czasu zdatności dla instalacji zasilania paliwem, uzyskana na podstawie badań eksploatacyjnych siłowni statku 1



Rys. 2. Charakterystyka gęstości prawdopodobieństwa czasu zdatności dla instalacji wody morskiej, uzyskana na podstawie badań eksploatacyjnych siłowni statku 2

F jest dystrybuantą zależną od parametru Θ, a u jest pewną gęstością prawdopodobieństwa. W tym przypadku

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \vartheta) u(\vartheta) d\vartheta \tag{1}$$

jest funkcją monotoniczną zmiennej x, rosnącą od 0 do 1 i wobec tego jest pewną nową dystrybuantą. Jeżeli F ma ciągłą gęstość f, wówczas W ma gęstość w daną wzorem

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \vartheta) u(\vartheta) d\vartheta \tag{2}$$

Jeżeli parametr Θ przyjmuje wartości $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, \ldots$ $p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1,$ to zamiast całkowania względem gęstości u, można sumować względem dyskretnego rozkładu parametru Θ i wówczas

$$w(x) = \sum_k f(x, \vartheta) p_k \tag{3}$$

określa nową gęstość prawdopodobieństwa. Postępowanie takie nosi nazwę *randomizacji.* Parametr ϑ traktowany jest jako zmienna losowa, a nowy rozkład prawdopodobieństwa określony jest na płaszczyźnie (x, Θ), która pełni rolę przestrzeni próbek. Gęstości uzyskane tą metodą nazywane są ogólnie *gęstościami rozkładów mieszanych.* Taka definicja rozkładów mieszanych uzyskanych w wyniku randomizacji parametru Θ prowadzi do otrzymania wielu nowych rozkładów [1, 2, 3, 7].

W dalej przedstawionych rozważaniach ograniczono się tylko do kilu szczególnego przypadku mieszaniny rozkładów.

Założono, że zmieszane są zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n,$ których dystrybuanty są odpowiednio równe $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x),$ a na wielkość X_k trafia się z prawdopodobieństwem $p_k, \sum_k p_k = 1.$

Dystrybuanta mieszaniny ma wówczas postać

$$F(x) = \sum_k p_k F_k(x) \tag{4}$$

gęstość prawdopodobieństwa mieszaniny

$$f(x) = \sum_k p_k f_k(x) \tag{5}$$

funkcja niezawodności mieszaniny

$$R(x) = 1 - F(x) = \sum_k p_k [1 - F_k(x)] = \sum_k p_k R_k(x) \tag{6}$$

Analogia ta nie dotyczy intensywności uszkodzeń, czy funkcji wiodącej. Zgodnie z definicją, dla mieszaniny n rozkładów intensywność uszkodzeń przyjmuje postać

$$\lambda(x) = -\frac{d}{dx}[\ln R(x)] = -\frac{d}{dx}[\ln(\sum_k p_k R_k(x))] = \frac{\sum_k p_k f_k(x)}{\sum_k p_k R_k(x)} \tag{7}$$

a funkcja wiodąca

$$\Lambda(x) = -\ln[R(x)] = -\ln[\sum_k p_k R_k(x)] = -\ln[1 - \sum_k p_k F_k(x)] \tag{8}$$

Jeśli oznaczy się przez $m_{k,r}$ moment zwykły r-tego rzędu dla k-tej zmiennej losowej X_k wchodzącej w skład mieszaniny, to moment zwykły r-tego rzędu dla całej mieszaniny ma postać

$$m_r = \sum_k p_k m_{k,r} \tag{9}$$

Natomiast momenty centralne r-tego rzędu mają postać znacznie bardziej złożoną

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \sum_l p_l m_{l,1})^r \sum_k p_k f_k(x) dx \tag{10}$$

W pewnych przypadkach wygodniej jest posługiwać się funkcją charakterystyczną rozkładu. Dla mieszaniny rozkładów funkcja charakterystyczna ma postać

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \sum_k p_k f_k(x) dx = \sum_k p_k \varphi_k(x) \tag{11}$$

gdzie $\varphi_k(t)$ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X_k (k = 1, 2, ..., n).

$F_1, F_2, \ldots$ są dystrybuantami o funkcjach charakterystycznych $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Jeżeli $p_k \geq 0$ i $\sum_k p_k = 1$, to kombinacja liniowa $U = \sum_k p_k F_k$ jest dystrybuantą o funkcji charakterystycznej $\varphi = \sum_k p_k \varphi_k$.

Ponieważ postawiony problem polega na rozszerzeniu możliwych modeli rozkładu czasu zdatności obiektów oraz wybraniu najlepszego modelu dla danych uzyskanych z badań eksploatacyjnych, nie można modeli zbytnio komplikować ze względu na dalszą analizę statystyczną. Wydaje się, że ograniczenie się do mieszanin dwóch zmiennych losowych o różnych rozkładach daje z jednej strony wystarczająco szeroki wachlarz nowych modeli, a z drugiej strony pozwala na względnie proste uzyskanie charakterystyk funkcyjnych i liczbowych rozpatrywanych modeli.

W dalszej części rozpatrzono pewne mieszaniny dwóch różnych rozkładów.

2. Wybrane mieszaniny rozkładów

2.1. Rozkład wykładniczy i rozkład Weibulla

Zmienna losowa X_1 ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_1, a zmienna losowa X_2 rozkład Weibulla z parametrami α_2 i λ_2, a tak jak zawsze p ($0 < p < 1$) określa prawdopodobieństwo trafienia na zmienną losową X_1.

Dla mieszaniny tych rozkładów otrzymuje się:

– dystrybuantę w postaci

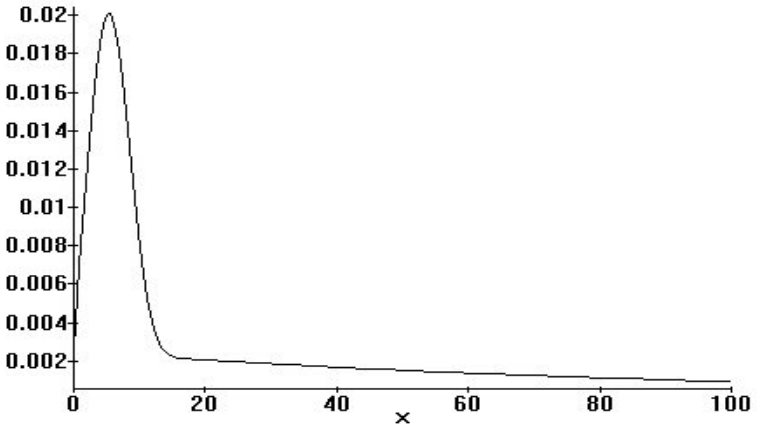
$$F(x) = 1 - pe^{-\lambda_1 x} - (1-p)e^{-\lambda_2 x^{\alpha_2}} \tag{12}$$

a gęstość prawdopodobieństwa

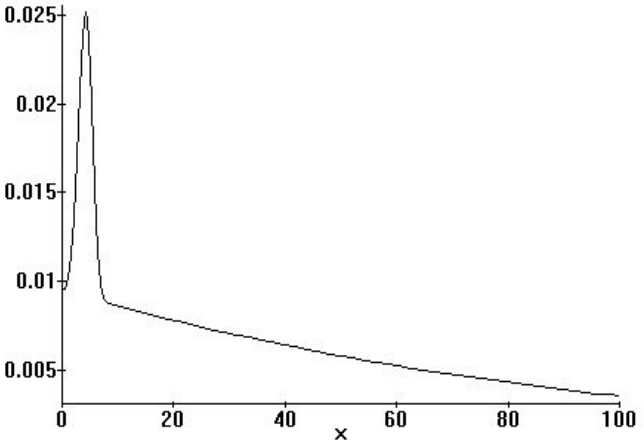
$$f(x) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2\alpha_2 x^{\alpha_2 - 1} e^{-\lambda_2 x^{\alpha_2}}, \quad \text{dla} \quad x \geq 0 \quad (13)$$

Ponieważ rozkład wykładniczy jest szczególnym przypadkiem rozkładu Weibulla, zatem wszystkie charakterystyki funkcyjne i liczbowe mieszaniny tych rozkładów mają postać taką jak dla mieszaniny dwóch rozkładów Weibulla, przy założeniu, że $\alpha_1 = 1$.

Przebiegi gęstości prawdopodobieństwa tej mieszaniny przy różnych wartościach parametrów przedstawiono na rysunkach 3 i 4.



Rys. 3. Gęstość prawdopodobieństwa mieszaniny rozkładu wykładniczego i rozkładu Weibulla dla $\lambda_1 = 0{,}01, \lambda_2 = 0{,}002, \alpha_2 = 3,$ przy $p = 0{,}25$



Rys. 4. Gęstość prawdopodobieństwa mieszaniny rozkładu wykładniczego i rozkładu Weibulla dla $\lambda_1 = 0{,}01, \lambda_2 = 0{,}002, \alpha_2 = 4,$ przy $p = 0{,}95$

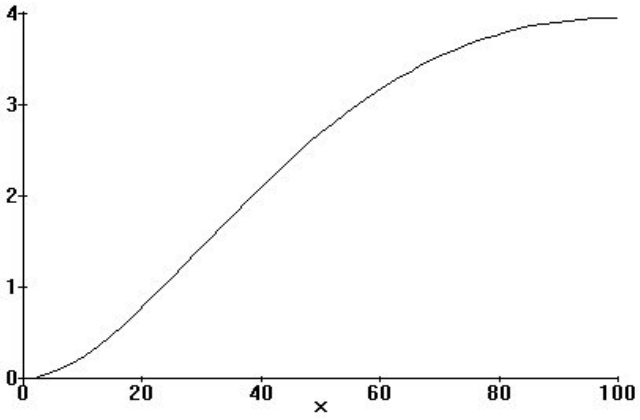
2.2. Rozkład wykładniczy i rozkład gamma

Zmienna losowa X_1 ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_1, zmienna losowa X_2 ma rozkład gamma z parametrami (α_2, λ_2) a p $(0 < p < 1)$ określa prawdopodobieństwo trafienia na zmienną losową X_1.

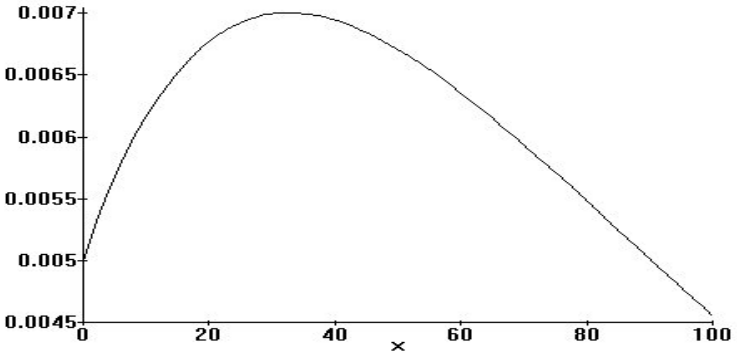
Mieszanina tych rozkładów ma gęstość prawdopodobieństwa postaci

$$f(x) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\frac{\lambda_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2 - 1} e^{-\lambda_2 x} \quad , \quad x \geq 0 \tag{14}$$

Przebiegi gęstości prawdopodobieństwa tej mieszaniny przy różnych wartościach parametrów przedstawiono na rysunkach 5 i 6.



Rys. 5. Gęstość prawdopodobieństwa mieszaniny rozkładu wykładniczego i rozkładu gamma dla $\lambda_1 = 0{,}01, \lambda_2 = 0{,}02, \alpha_2 = 3,$ przy $p = 0{,}25$



Rys. 6. Gęstość prawdopodobieństwa mieszaniny rozkładu wykładniczego i rozkładu gamma dla $\lambda_1 = 0{,}01, \lambda_2 = 0{,}02, \alpha_2 = 2,$ przy $p = 0{,}5$

2.3. Rozkład wykładniczy i rozkład normalny

Zmienna losowa X_1 ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_1, zmienna losowa X_2 ma rozkład normalny z parametrami μ_2 i σ_2, przy czym $\mu_2 \geq 3\sigma_2$ i p ($0 < p < 1$) jak zawsze określa udział zmiennej losowej X_1 w mieszaninie. Wówczas dla mieszaniny tych rozkładów otrzymuje się:

– dystrybuantę

$$F(x) = p\left(1 - e^{-\lambda_1 x}\right) + (1-p)\left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right] \tag{15}$$

– gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \frac{(1-p)}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right] \tag{16}$$

– intensywność uszkodzeń

$$\lambda(x) = \frac{p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \dfrac{1-p}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]}{1 + pe^{-\lambda_1 x} - (1-p)F_0\left(\dfrac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)} \tag{17}$$

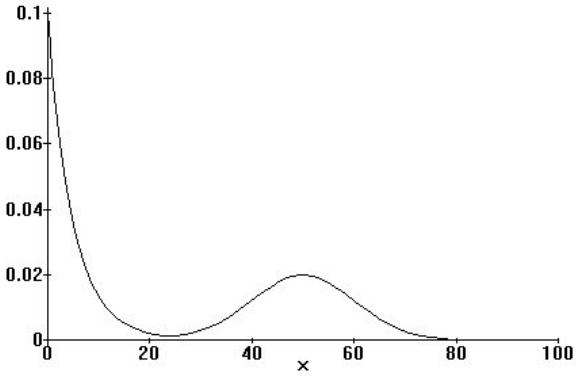
Wartość oczekiwana tej mieszaniny ma postać

$$\mu = EX = \frac{p}{\lambda_1} + (1-p)\mu_2 \tag{18}$$

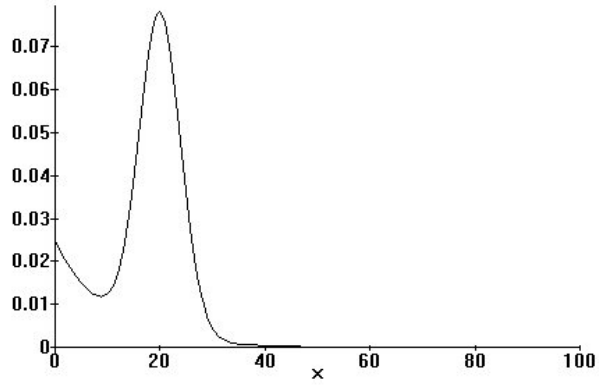
a wariancja

$$\sigma^2 = D^2X = \frac{p(2-p)}{\lambda_1^2} + (1-p)\left(\sigma_2^2 + p\mu_2\right) - 2p(1-p)\frac{\mu_2}{\lambda_1} \tag{19}$$

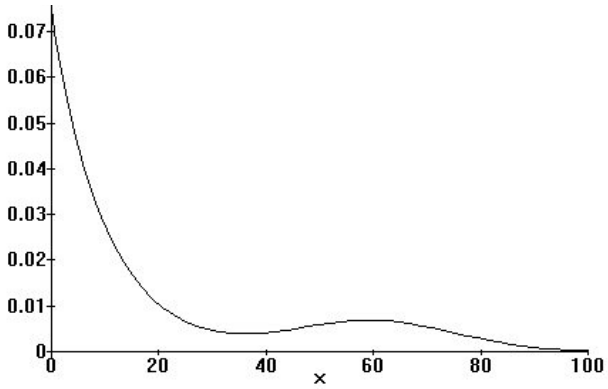
Dla ilustracji, jak zmienia się charakter tego rozkładu w zależności od wartości parametrów, na rysunkach 7–9 zamieszczono kilka charakterystyk gęstości prawdopodobieństwa.



Rys. 7. Gęstość prawdopodobieństwa mieszaniny rozkładu wykładniczego i rozkładu normalnego dla $\lambda_1 = 0,2, \mu_2 = 50, \sigma_2 = 10$ przy $p = 0,5$



Rys. 8. Gęstość prawdopodobieństwa mieszaniny rozkładu wykładniczego i rozkładu normalnego dla $\lambda_1 = 0,1, \mu_2 = 20, \sigma_2 = 4$ przy $p = 0,25$



Rys. 9. Gęstość prawdopodobieństwa mieszaniny rozkładu wykładniczego i rozkładu normalnego dla $\lambda_1 = 0,1, \mu_2 = 60, \sigma_2 = 15$ przy $p = 0,75$

3. Podsumowanie

Jeżeli żaden ze znanych rozkładów nie jest wystarczająco dobry, można poszukiwać odpowiedniego modelu zmieszanych przebiegów rozkładów dla czasu życia złożonych systemów technicznych.

Problemem jest znalezienie estymatorów parametrów występujących w mieszaninach rozkładów. W dostępnej literaturze brak jest jednoznacznych i prostych zależności na odpowiednie parametry mieszanin rozkładów.

Jeżeli zmieszane są zmienne losowe $X_1, X_2, ..., X_n$ o gęstościach zależnych tylko od jednego parametru $f_1(x, \vartheta_1), f_2(x, \vartheta_2), ..., f_n(x, \vartheta_n)$, przy czym na zmienną losową X_k trafia się z prawdopodobieństwem $p_k, (\sum_k p_k = 1)$, to dla N-elementowej próby losowej mieszaniny funkcja wiarygodności przyjmuje postać

$$L(y_1, y_2, ..., y_N, \vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_n) = \prod_{i=1}^{N} \left(\sum_k p_k f_k(y_i, \vartheta_k \right) \tag{20}$$

a jej logarytm

$$\ln L(y_1, y_2, ..., y_N, \vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\sum_k p_k f_k(y_i, \vartheta_k) \right) \tag{21}$$

Jeżeli założy się, że znane są prawdopodobieństwa p_k, to korzystając z warunku istnienia maksimum zlogarytmowanej funkcji wiarygodności, otrzymuje się układ n równań

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \vartheta_r} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sum_k p_k \frac{\partial f_k(y_i, \vartheta_k)}{\partial \vartheta_r}}{\sum_k p_k f_k(y_i, \vartheta_k)} = 0 \text{ dla } r = 1, 2, ..., n \tag{22}$$

Estymatory parametrów tej mieszaniny rozkładów wyznacza się rozwiązując powyższy układ równań. W rzeczywistości sytuacja jeszcze bardziej się komplikuje, gdyż najczęściej stosowane rozkłady są dwuparametrowe, a ponadto nie są znane prawdopodobieństwa p_k. Tak więc należy poszukiwać innych metod statystycznych pozwalających na wybór odpowiedniego modelu czasu zdatności obiektów spośród wymienionych mieszanin rozkładów.

Pewną pomocą w analizie systemów mechatronicznych mogą służyć bazy danych o rozkładach uszkodzeń poszczególnych grup urządzeń [8, 9, 12, 13].

Literatura

[1] Bobrowski D., *Wprowadzenie matematyczne do teorii niezawodności*. Wyd. Pol. Pozn., 1977.
[2] Bobrowski D., *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności*. WNT, Warszawa 1985.

[3] Chybowski L.M., Matuszak Z.R., *Examples of Distribution of Technical Object and System Up-States.* Risk, Quality and Reliability, VSB – Technical University of Ostrava, Ostrava 2007, s. 83–88.
[4] Matuszak Z., *Kompozicii raspredelenij charakteristik nadiożnosti i modeli otkazow sistem sudowych energeticzeskich ustanowok.* Kaliningradskij gosudarstwiennyj techniczeskij uniwersytet, Kaliningrad 2003, Monografia.
[5] Matuszak Z., *Charakterystyki niezawodnościowe wieloelementowych struktur mieszanych i odnawialnych.* Collection of research papers of the Baltic Association of Mechanical Engineering Experts, No 4, Mechanical Engineering of the Baltic Region, Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad 2004, 146–148.
[6] Matuszak Z., *Charakterystyki niezawodnościowe kilkuelementowych systemów technicznych o strukturze szeregowej i równoległej o różnych rozkładach czasów zdatności.* Collection of research papers of the Baltic Association of Mechanical Engineering Experts, No 4, Mechanical Engineering of the Baltic Region, Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad 2004, 149–153.
[7] Matuszak Z., *Selected safety models of elements and systems in the engine room.* International Scientific Journal PROBLEMS OF APPLIED MECHANICS. Georgian Committee of International Federation for the Machines and Mechanics, Tbilisi (Gruzja) 2004, No 1(14)/2004, 30–39.
[8] Nowakowski T., *Bazy wiedzy w badaniach niezawodności maszyn*. Materiały Konferencji Naukowej „Metody doświadczalne w budowie i eksploatacji maszyn roboczych, technologicznych oraz środków transportu", Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław-Szklarska Poręba 1993, 219–225.
[9] Prażewska M. (red.), *Niezawodność urządzeń elektronicznych*. WKiŁ, Warszawa 1987.
[10] Rausand M., Høyland A., *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications.* 2nd edition. New Jersey, Wiley, Interscience 2004.
[11] Saleh J.H., Marais K., *Reliability: How much is it worth? Beyond its estimation or prediction, the (net) present value of reliability*. Reliability Engineering and System Safety, vol. 91, 2006, 665–673.
[12] Sotskow B.S., *Niezawodność elementów i urządzeń automatyki*. WNT, Warszawa 1973.
[13] Ważyńska-Fiok K., Jaźwiński J., *Niezawodność systemów technicznych.* PWN, Warszawa 1990.