

Henryk Gurgul*, Paweł Zając*

Rozkłady dziennych stóp zwrotu i wielkości obrotów dla spółek z indeksu CAC40 i ich zmiany w okresie kryzysu finansowego

1. Wprowadzenie

Rozkłady empiryczne stóp zwrotu z akcji, a także logarytmu wielkości obrotów mają grube ogony i wykazują wyższe wartości prawdopodobieństwa dla średniej i leżących wokół niej wartości, niż miałyby to miejsce w przypadku rozkładu normalnego. Łączne występowanie wymienionych zjawisk znane jest w literaturze finansowej jako tzw. leptokurtoza. Wyniki dotychczasowych badań empirycznych wykorzystujących dostępne dane dają podstawy do przyjęcia, że istnieje co najmniej kilka rozkładów empirycznych, które mogą być użyte do opisu właściwości stóp zwrotu akcji lub logarytmu wielkości obrotów. Rozkłady wykorzystywane do opisu stóp zwrotu lub wielkości obrotów można podzielić na dwie grupy. Pierwsza grupa obejmuje rozkłady symetryczne z rodziny tzw. rozkładów eliptycznych. Należy do nich między innymi rozkład t -Studenta. Drugą grupę tworzą rozkłady asymetryczne pozwalające uwzględnić asymetrię w ogonach. Badania dotyczące rozkładu stóp zwrotu akcji, a także wielkości obrotów są istotne nie tylko ze względów teoretycznych. Wyniki badań mogą być także przydatne dla inwestorów, analityków giełdowych, instytucji ubezpieczeniowych i innych [7].

Ciekawym zagadnieniem jest stabilność rozkładów stóp zwrotu i wielkości obrotów w czasie, w szczególności jak na te rozkłady wpływa światowy kryzys finansowy.

* Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Wydział Zarządzania, Pracownia Zastosowań Matematyki w Ekonomii, e-mail: henryk.gurgul@gmail.com, pzajac@zarz.agh.edu.pl

W następnej części pracy zostaną krótko omówione wybrane dotychczasowe próby modelowania stóp zwrotu. W rozdziale trzecim zostanie przedstawiona charakterystyka i właściwości rozkładów wykorzystanych w pracy. W rozdziale czwartym zostaną opisane dane. Piąty rozdział zawiera wyniki obliczeń i ich analizę. W ostatniej szóstej części zostaną podsumowane najważniejsze wyniki.

2. Przegląd literatury

Za prekursora badań rozkładów stóp zwrotu akcji można uznać M. Kendalla [21]. W 1953 roku przeprowadził on badania zachowania tygodniowych stóp zwrotu akcji brytyjskich przedsiębiorstw. Wprawdzie nie podważył on zasadniczo założenia o normalności rozkładu, ale jednak wykrył istnienie leptokurtozy, a także stwierdził istnienie zbyt wielu jak na rozkład normalny wartości ekstremalnych, które usunął z próby statystycznej.

Bardzo istotną pracą dotyczącą stóp zwrotu w przypadku kursów akcji giełdy nowojorskiej jest praca M. Osborne'a z 1959 [28]. Autor starał się dopasować do miesięcznych i rocznych stóp zwrotu z akcji rozkład logarytmiczny. Stwierdził on, że rozkład logarytmicznej stopy zwrotu z indeksu Dow Jonesa (*Dow Jones Industrial Average*) w okresie 1915–1956 jest normalny.

Inny znany badacz Benoit Mandelbrot sięgnął w 1963 [27] do prac Louisa Bacheliera [4], ale same ceny akcji zastąpił ich logarytmami, zaś zamiast różnic cen rozpatrywał różnice ich logarytmów. Zaproponował zastąpienie rozkładu normalnego w modelu Bacheliera rozkładami stabilnymi Pareto–Levy'ego dla różnych wartości parametrów. Dla rozkładu normalnego parametr stabilności wynosi 2, Mandelbrot uzyskał dla analizowanych stóp zwrotu wartości mniejsze od 2, ale większe od 1 (ta ostatnia wartość jest przyjmowana przez rozkład Cauchy'ego).

Rozkładami stóp zwrotu zajmował się także Fama w 1965 [14]. Uważał on, że zmiany cen są niezależne od siebie oraz, że zmiany ceny podlegają pewnemu rozkładowi prawdopodobieństwa. Na podstawie zachowania logarytmicznych dziennych stóp zwrotu dla 30 spółek wchodzących w skład indeksu DJIA w okresie 1957–1962 ustalił ich wyższą leptokurtyczność niż w przypadku rozkładu normalnego, co skłoniło go do akceptacji hipotezy Mandelbrota. Peter Praetz [32] na podstawie badań z 1972 roku dotyczących cen akcji na giełdzie australijskiej (*Sydney Stock Exchange*) zasugerował zastosowanie do opisu stóp zwrotu rozkładów z rodziny rozkładów t -Studenta. Stanowisko Praetza wsparły wyniki badań Blattberga i Gonedesa [8]. Peter Clark [11] w przeciwieństwie do Famy uznał, że mieszanka rozkładów normalnych może być alternatywą w stosunku do stabilnych rozkładów Pareto–Levy'ego. Także Hsu, Miller i Wichern [19] wykazali to w swoich badaniach.

Wyniki otrzymane przez Roberta Hagermana [18], a także R. Kona [22] potwierdzają hipotezy o przydatności do opisu stóp zwrotu rozkładu t -Studenta lub mieszanki rozkładów normalnych. Richard Bookstaber i James McDonald [9] zaproponowali w 1987 uogólniony rozkład nazwany przez nich GB2 (*generalized beta of the second kind*) do opisu stóp zwrotu, obejmujący znane rozkłady jako przypadki graniczne lub specjalne. Autorzy uzyskali dobre dopasowanie do danych empirycznych. Rozkładami stóp zwrotu zajmowali się też Badrinath i Chatterjee [5] oraz Vedat Akgiray [3]. Errunza i in. [13] porównali rozkłady stóp zwrotu w przypadku krajów rozwijających się i rozwiniętych oraz sformułowali tezę o konwergencji rozkładów stóp zwrotu krajów rozwijających się do rozkładów stóp zwrotu krajów rozwiniętych w miarę rozwoju tych pierwszych. Palagyi i Mantegna [29] podali, że w przypadku rynku węgierskiego najlepiej pasują stabilne rozkłady Pareto–Levy’ego o zmiennym indeksie stabilności. Badania stóp zwrotu spółek z indeksu DAX 30 i FAZ przeprowadzone przez Kuechlera i in. [25] wykazały bardzo dobre dopasowanie do danych empirycznych rozkładów hiperbolicznych. Granicznym rozkładem dla tej rodziny jest rozkład normalny. Autorzy sformułowali wniosek, że w przypadku krótkiego horyzontu czasowego najlepiej sprawdzają się rozkłady hiperboliczne, a w przypadku długiego horyzontu czasowego najlepiej sprawdza się rozkład normalny. W 2000 roku została opublikowana praca B. Lin i S. Yeh [26]. Zbadano tygodniowe stopy zwrotu 72 spółek i indeksu giełdy w latach 1985–1997. Najlepsze wyniki uzyskano dla mieszanki rozkładów normalnych. Inne wyniki badań nad rozkładami stóp zwrotu można znaleźć w [2], [10], [16], [20], [24], [30], [31], [33], [34], [35] i [36].

Znacznie później niż badania stóp zwrotu rozpoczęto badania nad rozkładami statystycznymi wielkości obrotów (głównie w postaci tzw. log-wolumenu). W pracy Clarka [11] zostało pokazane, że wolumen, w rozważanym przez niego przykładzie kontraktów terminowych na rynku bawełny, ma rozkład lognormalny, czyli log-wolumen ma rozkład normalny. Rozkład wolumenu badali również Gallant i in. [15]. Za pomocą metod nieparametrycznych estymowali łączny rozkład stóp zwrotu oraz logarytmów wolumenu na NYSE w latach 1928–1985. Ich wyniki posłużyły do analizy wzajemnych zależności pomiędzy tymi wielkościami. W 1996 roku Andersen [1], rozszerzając cytowaną pracę Clarka, zaproponował model rynku, w którym wolumen ma warunkowy rozkład Poissona. Przyjęcie takiego założenia pozwoliło na dodatkowe badanie właściwości ukrytego procesu napływu informacji na rynek, od którego wolumen i zmienność cen wspólnie zależą. Jedną z nowszych prac na temat rozkładu wielkości obrotów jest praca Gurgula i in. [17] dotycząca wielkości obrotów na giełdzie nowojorskiej. Rozkład wolumenu obrotów ma istotne znaczenie w przypadku jego stosowania do opisu modeli szeregów czasowych, a także gdy stosuje się go w modelach opisujących, np. stopy zwrotu lub ich zmienność.

Zanim rozpoczniemy dopasowywanie rozkładów do danych empirycznych, przedstawimy właściwości szeregu potencjalnie przydatnych w kontekście naszych badań rozkładów: skalowanego t -Studenta, logistycznego, potęgowo-wykładniczego, hiperbolicznego, α -stabilnego i normalnego odwrotnego gaussowskiego (NIG). Oszacowano na podstawie danych parametry tych rozkładów, ponieważ są one szeroko używane w analizie bezwarunkowych rozkładów stóp zwrotu i wielkości obrotów.

3. Charakterystyka rozkładów

Rozkład skalowany t -Studenta. Funkcja gęstości tego rozkładu dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi(v-2)\sigma^2}} \left[1 + \frac{(x-\mu)^2}{(v-2)\sigma^2}\right]^{-\frac{v+1}{2}}, \quad (1)$$

gdzie Γ jest funkcją gamma Eulera, μ ($-\infty < \mu < \infty$) i σ ($\sigma^2 > 0$) są parametrami charakteryzującymi odpowiednio położenie i rozproszenie, a v ($v > 0$) jest parametrem odpowiedzialnym za liczbę stopni swobody. Skalowany rozkład t -Studenta jest uogólnieniem rozkładu t -Studenta. Dzieje się tak, ponieważ w przypadku gdy zmienna losowa X ma skalowany rozkład t -Studenta, to μ i σ wyrażają odpowiednio średnią i odchylenie standardowe, natomiast $(X - \mu)/\sigma$ ma rozkład t -Studenta z v stopniami swobody.

Rozkład logistyczny. Funkcja gęstości tego rozkładu dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)}{\alpha \left[1 + \exp\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)\right]^2}, \quad (2)$$

gdzie μ ($-\infty < \mu < \infty$) jest parametrem położenia, natomiast α ($\alpha > 0$) jest parametrem rozproszenia. Zachodzą w tym przypadku zależności

$$\text{var}(X) = \frac{\pi^2 \alpha^2}{3}, \quad E(X) = \mu.$$

Rozkład potęgowo-wykładniczy. Funkcja gęstości tego rozkładu [6] dana jest wzorem:

$$f(x) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \left| \frac{x-\mu}{\alpha} \right|^{\frac{2}{1+\beta}}\right]}{2^{\frac{3+\beta}{2}} \alpha \Gamma\left(\frac{3+\beta}{2}\right)}, \quad (3)$$

gdzie μ ($-\infty < \mu < \infty$), α ($\alpha > 0$) są parametrami odpowiednio: położenia oraz rozproszenia, a β ($-1 < \beta \leq 1$) jest parametrem kształtu. Ostatni z tych parametrów można traktować jako miarę spłaszczenia. Jeśli $\beta > 0$, to rozkład posiada grube ogony. Gdy $\beta = 0$, to rozkład jest normalny, a dla $\beta < 0$ mamy do czynienia z rozkładem o wąskich ogonach. Zachodzą tutaj zależności:

$$\text{var}(X) = \alpha^2 \cdot \Gamma\left(\frac{3(1+\beta)}{2}\right) \cdot \left(\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\right)^{-1}, \quad \mu = E(X).$$

Rozkład hiperboliczny. Funkcja gęstości tego rozkładu [12] dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{\psi/\chi} \exp\left\{\beta(x-\mu) - \sqrt{(\psi+\beta^2)}(\chi+(x-\mu)^2)\right\}}{2\sqrt{\psi+\beta^2} K_1(\sqrt{\psi\chi})}, \quad (4)$$

gdzie ψ ($\psi > 0$) i β ($-\infty < \beta < \infty$) są parametrami kształtu, χ ($\chi > 0$) jest parametrem skali, a μ ($-\infty < \mu < \infty$) opisuje położenie. Natomiast $K_1(\cdot)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela trzeciego rodzaju z indeksem 1. Rozkład hiperboliczny zawiera jako przypadki graniczne rozkłady: gaussowski, wykładniczy, Laplace'a i uogólniony odwrotny gaussowski.

Rozkład normalny odwrotny gaussowski (NIG). Funkcja gęstości tego rozkładu dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{\alpha \delta K_1\left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right)}{\pi \sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} \exp\{\delta\gamma + \beta(x-\mu)\}, \quad (5)$$

gdzie $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Ogony dla tego rozkładu są większe niż ogony rozkładu normalnego. Rozkład ten jest użyteczny w sytuacji, gdy bardziej prawdopodobne jest występowanie wartości stosunkowo odległych od średnich niż w przypadku rozkładu normalnego.

Parametry rozkładu są liczbami rzeczywistymi, μ jest parametrem położenia, α odpowiada za wielkość ogonów, β jest parametrem asymetrii, δ parametrem skali.

Zachodzą zależności $\text{var}(X) = \frac{\delta\alpha^2}{\gamma^3}$, $E(X) = \mu + \frac{\beta\delta}{\gamma}$. Ponadto skośność jest równa $\frac{3\beta}{\alpha\sqrt{\delta\gamma}}$.

Rozkład α -stabilny zdefiniowany jest za pomocą funkcji charakterystycznej, która jest dana wzorem:

$$\Phi(t) = \begin{cases} \exp \left\{ -\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) t g \frac{\pi\alpha}{2} \right) + i\mu t \right\} & \alpha \neq 1 \\ \exp \left\{ -\sigma^\alpha |t| \left(1 - i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \ln(t) \right) + i\mu t \right\} & \alpha = 1 \end{cases}, \quad (6)$$

gdzie μ ($-\infty < \mu < \infty$) i σ ($\sigma > 0$) są parametrami odpowiednio położenia i skali, β ($-1 < \beta < 1$) jest parametrem skośności, a α ($0 < \alpha \leq 2$) jest indeksem stabilności rozkładu. Rozkład ten został zaproponowany w roku 1924 przez Lévy'ego. Jako jego szczególnie przypadki można wskazać: rozkład Lévy'ego ($\alpha = 1/2$), rozkład Cauchy'ego ($\alpha = 1$), rozkład normalny ($\alpha = 2$).

Dodatkowo, jeżeli $0 < \alpha < 2$, to rozkład ma „grubsze ogony” od rozkładu normalnego. Warto zauważyć, że w przeciwieństwie do wspomnianych wcześniej rozkładów, rozkłady należące do klasy α -stabilnych mają nieskończoną wariancję (jedynym wyjątkiem dla $\alpha = 2$ jest rozkład normalny).

4. Opis danych

Obliczenia przeprowadzono w przypadku spółek notowanych na giełdzie paryskiej, która jest dużej wielkości giełdą europejską. Badaniu poddano logarytmiczne stopy zwrotu 40 spółek giełdy paryskiej oraz logarytmy wielkości obrotów. Badane dane wejściowe obejmują dzienne wartości stóp zwrotu i wielkości obrotów w okresach 02.02.2008–09.10.2008 – przed kryzysem, 10.10.2008–15.05.2009 w czasie trwania kryzysu. Tabela 1 i tabela 2 zawierają statystyki opisowe stóp zwrotu i logarytmów wielkości obrotów 3 spółek z CAC40 o największej kapitalizacji sprzed kryzysu i z okresu kryzysu.

Tabela 1

Statystyki opisowe stóp zwrotu spółek o największej kapitalizacji przed kryzysem (wartość górna) i w czasie trwania kryzysu (wartość dolna)

Nazwa spółki	min.	maks.	średnia	odch. stand.	Kw. 1	Kw. 2	Kw. 3	Skośn.	kurtoza
SANOFL-AVENTIS	-6,0253 -10,913	6,9035 13,681	-0,08120 -0,032707	1,9151 3,0869	-1,17200 -1,64700	-0,02043 0,11920	0,93450 1,51500	0,087521 0,28025	1,0250 3,2068
BNP PARIBAS	-7,4275 -18,926	16,131 18,874	0,061585 -0,26448	2,9104 5,8518	-1,85200 -3,5720	-0,41840 -0,3706	1,35200 2,6440	1,3271 0,24144	5,0250 1,1542
GDF SUEZ	-4,4415 -14,018	9,4492 22,318	-0,029496 -0,20718	2,1283 4,3216	-1,53700 -2,6750	-0,05435 -0,2194	1,39100 2,3470	0,58698 0,72540	1,5603 4,5681

Źródło: obliczenia własne

Tabela 2

Statystyki opisowe wielkości obrotów spółek o największej kapitalizacji przed kryzysem (wartość górna) i w czasie trwania kryzysu (wartość dolna)

Nazwa spółki	min.	maks.	średnia	odch. stand.	Kw. 1	Kw. 2	Kw. 3	Skośn.	kurtoza
SANOFL-AVENTIS	7,1565 6,9242	9,5308 9,6859	8,4115 8,4644	0,38118 0,40423	8,186 8,231	8,390 8,453	8,649 8,708	-0,068035 -0,13369	1,1734 1,3971
BNP PARIBAS	7,5145 7,2433	10,278 9,9118	8,6374 8,7633	0,41540 0,42106	8,360 8,495	8,624 8,730	8,877 9,051	0,45891 -0,021299	1,2990 0,60097
GDF SUEZ	6,2471 6,8836	11,064 10,077	7,7481 8,6859	0,73113 0,44801	7,166 8,436	7,561 8,676	8,346 8,942	0,92144 -0,12914	1,4209 1,9445

Źródło: obliczenia własne

5. Metodologia i wyniki badań

Pierwszym krokiem w estymacji rozkładów stóp zwrotu oraz wielkości obrotów jest sprawdzenie zgodności z rozkładem normalnym. W tym celu zastosowano test Jarque'a-Bera, którego statystyka bazuje na wartościach skośności i kurtozy. Okazało się, że w przypadku stóp zwrotu w okresie poprzedzającym kryzys test Jarque'a-Bera wskazał na 12 spółek (spośród zbadanych 39 spółek), jako takich, dla których nie było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o zgodności z rozkładem normalnym o nieznannej średniej i wariancji. W okresie kryzysu test Jarque'a-Bera wskazał na 17 spółek. W przypadku wielkości obrotów nie było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej w przypadku 21 spółek w okresie

poprzedzającym kryzys i w przypadku jedynie 5 w czasie jego trwania. Nie ma jednak reguły, że spółka, w przypadku której przyjęto hipotezę o występowaniu normalności rozkładu przed kryzysem ma rozkład normalny w czasie kryzysu bądź odwrotnie. Zauważa się tu dużą losowość.

W związku z częstym brakiem normalności rozkładu zarówno stóp zwrotu, jak i wielkości obrotów konieczne staje się rozważenie innych alternatywnych rozkładów. Podwyższone wartości kurtozy rozważanych szeregów danych sugerują, że rozkładów wielkości obrotów należy szukać, podobnie jak stóp zwrotu, wśród rozkładów o grubych ogonach. Do badań wybrane zostały następujące rozkłady: *t*-Studenta, potęgowo-wykładniczy, logistyczny, odwrotny rozkład Gaussa (NIG), hiperboliczny oraz rozkład α -stabilny.

Parametry wymienionych rozkładów zostały wyestymowane metodą największej wiarygodności, przy użyciu programu Matlab. Ze względu na ilość badanych spółek nie zamieszczono wszystkich wyestymowanych parametrów. Wybrano najlepszy rozkład teoretyczny i tylko dla niego sprawdzono, w jaki sposób zmieniły się parametry. Do oceny dopasowania wyestymowanych rozkładów zastosowano test chi-kwadrat, test Kołmogorowa oraz statystykę Andersona–Darlinga. Oba wspomniane testy są jednymi z podstawowych stosowanych w badaniach zgodności rozkładów. W przypadku obu testów zbudowano 5-procentowe przedziały ufności.

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na niedokładności związane z zastosowaniem powyższych testów. Najważniejszą jest fakt, że testujemy zgodność z rozkładami, których parametry zostały wcześniej wyestymowane metodą największej wiarygodności. Wynika z tego konieczność ostrożnej interpretacji uzyskanych wyników.

Szczegółowe wyniki testów, które tu nie zostały zamieszczone, wskazały na kilka spółek, w przypadku których odrzucono zgodność z każdym z badanych rozkładów. Zdarzyło się tak w przypadku rozkładów stóp zwrotu w okresie kryzysu dla MICHELIN oraz w przypadku rozkładu logarytmu wielkości obrotów dla DEXIA, GDF-SUEZ, LVMH z okresu przed kryzysem i dla MICHELIN z okresu kryzysu.

W pozostałych przypadkach zazwyczaj więcej niż jedna gęstość rozkładu teoretycznego pasuje w sensie statystycznym do rozkładu empirycznego. Potrzeba zatem kryterium wyboru najlepszego rozkładu. W tym celu posłużymy się otrzymanymi statystykami Kołmogorowa oraz Andersona–Darlinga.

Jak wiadomo statystyka Kołmogorowa jest oparta na największej odległości pomiędzy wyestymowaną dystrybuantą teoretyczną a dystrybuantą empiryczną. Natomiast statystyka Andersona–Darlinga służy w szczególności do badania dopasowania rozkładu w ogonach, co w omawianym kontekście jest szczególnie istotne.

Statystyka w teście Kołmogorowa została oparta na supremum różnicy wartości dystrybuanty teoretycznej i empirycznej w punktach pochodzących z badanej próbki:
$$K = \sup_x |F_n(x) - F(x)|.$$

Statystyka Andersona–Darlinga jest zdefiniowana jako

$$A^2 = -N - S,$$

gdzie $S = \sum_{i=1}^N \frac{2i-1}{N} [\ln F(x_i) + \ln(1 - F(x_{N+1-i}))]$, $F(x)$ jest zadaną dystrybuantą teoretyczną, a N – licznością próbki.

W tabelach poniżej znajdują się wartości statystyk Kołmogorowa i Andersona–Darlinga dla dopasowanych rozkładów teoretycznych. W tabeli 3 podane są wartości statystyki Kołmogorowa dla dziennych stóp zwrotu badanych spółek w okresie poprzedzającym kryzys. Tabela 4 zawiera wartości statystyki Kołmogorowa dla rozkładów teoretycznych w przypadku dziennych stóp zwrotu badanych spółek w czasie kryzysu. Tabele 5 i 6 podają analogiczne wartości dla tych samych danych według statystyki Andersona–Darlinga. Tabele 7–10 obrazują odpowiednie wyniki z uwzględnieniem wielkości obrotów spółek. Najmniejsze wartości zostały pogrubione. Ostatnia kolumna zawiera sumę otrzymanych wartości statystyki dla odpowiedniego rozkładu. Liczba ta jest pomocna w określeniu jakości dopasowania danego rozkładu teoretycznego do wszystkich spółek indeksu. Wyniki badań dotyczące wszystkich spółek zamieszczono tylko w przypadku tabeli 3, w tabelach 4–10 ze względu na rozmiary artykułu zaprezentowano tylko wyniki dotyczące pierwszych trzech i ostatnich trzech (według alfabetu) spółek oraz sumy statystyk odpowiednio Kołmogorowa i Andersona–Darlinga dla wszystkich spółek.

Tabela 3

Statystyka Kołmogorowa dla stóp zwrotu w okresie bezpośrednio poprzedzającym kryzys, wytłuszczono najmniejsze wartości w wierszach

Nazwa	Normalny	Skalowany t-Student	Logist.	exp. pow.	Hiperb.	NIG	Stabilny
ACCOR	0,0676	0,0417	0,0490	0,0427	0,0478	0,0458	0,0472
AIR FRANCE-KLM	0,0651	0,0616	0,0660	0,0627	0,0660	0,0497	0,0615
AIR LIQUIDE	0,0416	0,0371	0,0463	0,0479	0,0363	0,0371	0,0300
ALCATEL-LUCENT	0,0596	0,0609	0,0822	0,0514	0,0668	0,0668	0,0616
ALSTOM	0,0572	0,0320	0,0418	0,0404	0,0349	0,0356	0,0314
ARCELORMITTAL	0,0646	0,0674	0,0788	0,0896	0,0486	0,0554	0,0651
AXA	0,0967	0,0525	0,0892	0,0913	0,0280	0,0317	0,0438
BNP PARIBAS	0,0900	0,0540	0,0949	0,1009	0,0335	0,0317	0,0689

Tabela 3 cd.

Nazwa	Normalny	Skalowany t-Student	Logist.	exp. pow.	Hiperb.	NIG	Stabilny
BOUYGUES	0,0475	0,0432	0,0513	0,0405	0,0434	0,0437	0,0396
CAP GEMINI	0,0381	0,0404	0,0485	0,0393	0,0393	0,0399	0,0381
CARREFOUR	0,0722	0,0350	0,0569	0,0319	0,0325	0,0324	0,0455
CREDIT AGRICOLE	0,1087	0,0602	0,0933	0,0856	0,0336	0,0381	0,0483
DANONE	0,0548	0,0292	0,0322	0,0269	0,0282	0,0288	0,0312
DEXIA	0,1212	0,0401	0,1018	0,0617	0,0463	0,0424	0,0478
EADS (PAR)	0,0399	0,0448	0,0535	0,0456	0,0401	0,0408	0,0433
EDF	0,0757	0,0394	0,0578	0,0349	0,0345	0,0362	0,0439
ESSILOR INTL.	0,0737	0,0350	0,0521	0,0376	0,0338	0,0369	0,0281
FRANCE TELECOM	0,0694	0,0305	0,0483	0,0438	0,0324	0,0329	0,0305
GDF SUEZ	0,0545	0,0437	0,0474	0,0489	0,0545	0,0545	0,0468
L'OREAL	0,0378	0,0413	0,0597	0,0482	0,0302	0,0302	0,0456
LAFARGE	0,0753	0,0614	0,0639	0,0446	0,0387	0,0553	0,0639
LAGARDERE GROUPE	0,0534	0,0291	0,0429	0,0397	0,0432	0,0433	0,0383
LVMH	0,0391	0,0356	0,0504	0,0385	0,0465	0,0464	0,0399
MICHELIN	0,0518	0,0478	0,0516	0,0480	0,0421	0,0421	0,0502
PERNOD-RICARD	0,0745	0,0500	0,0580	0,0468	0,0345	0,0406	0,0559
PEUGEOT	0,0565	0,0569	0,0753	0,0629	0,0425	0,0431	0,0622
PPR	0,0496	0,0501	0,0615	0,0513	0,0401	0,0404	0,0505
RENAULT	0,0452	0,0391	0,0508	0,0410	0,0407	0,0405	0,0387
SAINT GOBAIN	0,0687	0,0437	0,0620	0,0593	0,0354	0,0371	0,0536
SANOFI-AVENTIS	0,0619	0,0352	0,0393	0,0313	0,0279	0,0313	0,0370
SCHNEIDER ELECTRIC	0,0465	0,0477	0,0587	0,0544	0,0479	0,0476	0,0434
SOCIETE GENERALE	0,0928	0,0469	0,0852	0,0854	0,0327	0,0378	0,0493
STMICRO-ELECTRONICS	0,0445	0,0452	0,0670	0,0360	0,0433	0,0431	0,0398
SUEZ ENVIROMENT	0,0402	0,0395	0,0374	0,0462	0,0411	0,0404	0,0390
UNIBAIL-RODAMCO	0,0614	0,0487	0,0564	0,0551	0,0467	0,0469	0,0490
VALLOUREC	0,0559	0,0427	0,0505	0,0520	0,0461	0,0449	0,0453
VEOLIA ENVIRONNEMENT	0,0501	0,0322	0,0306	0,0329	0,0345	0,0351	0,0344
VINCI (EX SGE)	0,0490	0,0505	0,0517	0,0451	0,0446	0,0449	0,0473
VIVENDI	0,0652	0,0574	0,0519	0,0536	0,0499	0,0508	0,0568
SUMA	2,4175	1,7500	2,2958	1,9960	1,5890	1,6223	1,7926

Tabela 4

Statystyka Kołmogorowa dla stóp zwrotu w okresie kryzysu, wytłuszczono najmniejsze wartości w wierszach

Nazwa	Normalny	Skalowany t-Student	Logist.	exp. pow.	Hiperb.	NIG	Stabilny
ACCOR	0,0394	0,0419	0,0516	0,0380	0,0416	0,0419	0,0424
AIR FRANCE-KLM	0,0703	0,0554	0,0599	0,0423	0,0485	0,0503	0,0513
AIR LIQUIDE	0,0526	0,0325	0,0369	0,0339	0,0309	0,0306	0,0316
VEOLIA ENVIRONNEMENT	0,0755	0,0559	0,0750	0,0731	0,0463	0,0452	0,0592
VINCI (EX SGE)	0,0856	0,0293	0,0630	0,0367	0,0333	0,0262	0,0376
VIVENDI	0,0645	0,0436	0,0523	0,0500	0,0445	0,0435	0,0388
SUMA	2,5465	1,6951	2,1605	1,7950	1,5750	1,5990	1,7847

Tabela 5

Statystyka Andersona–Darlinga dla stóp zwrotu w okresie bezpośrednio poprzedzającym kryzys, wytłuszczono najmniejsze wartości w wierszach

Nazwa	Normalny	Skalowany t-Student	Logist.	exp. pow.	Hiperb.	NIG	Stabilny
ACCOR	0,7379	0,3220	0,3433	0,2291	0,2492	0,2915	0,4098
AIR FRANCE-KLM	0,7215	0,6889	0,7939	0,6890	0,7622	0,4313	0,64
AIR LIQUIDE	0,4592	0,2707	0,3370	0,3959	0,2248	0,2301	0,1483
VEOLIA ENVIRONNEMENT	0,7101	0,1557	0,2311	0,2164	0,1591	0,1539	0,148
VINCI (EX SGE)	0,3044	0,2360	0,3072	0,2602	0,2093	0,2096	0,2059
VIVENDI	0,4130	0,3489	0,4072	0,3390	0,2870	0,2908	0,3346
SUMA	32,9763	14,2691	23,9732	18,3532	10,6689	12,6604	12,5978

Tabela 6

Statystyka Andersona–Darlinga dla stóp zwrotu w okresie kryzysu, wyłuszczone najmniejsze wartości w wierszach

Nazwa	Normalny	Skalowany t-Student	Logist.	Exp. pow.	Hiperb.	NIG	Stabilny
ACCOR	0,3716	0,3476	0,4823	0,3672	0,3642	0,3652	0,3339
AIR FRANCE-KLM	0,6579	0,4139	0,4113	0,4080	0,3348	0,3483	0,4230
AIR LIQUIDE	0,7125	0,1639	0,2152	0,1696	0,1222	0,1302	0,1905
VEOLIA ENVIRONNEMENT	1,3486	0,5411	0,7600	1,0972	0,3936	0,4078	0,3771
VINCI (EX SGE)	1,9909	0,1166	0,8823	0,2593	0,1977	0,1376	0,2217
VIVENDI	0,9201	0,2970	0,3839	0,4174	0,2794	0,2789	0,3098
SUMA	36,2913	11,7793	20,3194	13,0158	11,1834	11,7345	12,9270

Tabela 7

Statystyka Kołmogorowa dla wielkości obrotów w okresie bezpośrednio poprzedzającym kryzys, wyłuszczone najmniejsze wartości w wierszach

Nazwa	Normalny	Skalowany t-Student	Logist.	Exp. pow.	Hiperb.	NIG	Stabilny
ACCOR	0,0520	0,0548	0,0669	0,0500	0,0553	0,0545	0,0534
AIR FRANCE-KLM	0,0516	0,0395	0,0465	0,0456	0,0419	0,0367	0,0397
AIR LIQUIDE	0,0491	0,0259	0,0371	0,0324	0,0320	0,0314	0,0321
VEOLIA ENVIRONNEMENT	0,0960	0,0791	0,0966	0,1056	0,1014	0,0522	0,1108
VINCI (EX SGE)	0,0552	0,0550	0,0588	0,0581	0,0558	0,0518	0,0531
VIVENDI	0,0817	0,0573	0,0676	0,0759	0,0712	0,0406	0,0540
SUMA	2,5424	2,0780	2,5537	2,3465	2,0918	1,8392	2,2425

Tabela 8

Statystyka Kołmogorowa dla wielkości obrotów w okresie kryzysu, wyłuszczone najmniejsze wartości w wierszach

Nazwa	Normalny	Skalowany t-Student	Logist.	Exp. pow.	Hiperb.	NIG	Stabilny
ACCOR	0,0560	0,0396	0,0380	0,0388	0,0414	0,0407	0,0378
AIR FRANCE-KLM	0,0613	0,0525	0,0622	0,0531	0,0643	0,0453	0,0422
AIR LIQUIDE	0,0895	0,0515	0,0734	0,0586	0,0320	0,0381	0,0768
VEOLIA ENVIRONNEMENT	0,0671	0,0464	0,0522	0,0527	0,0505	0,0393	0,0449
VINCI (EX SGE)	0,0825	0,0415	0,0631	0,0374	0,0409	0,0390	0,0557
VIVENDI	0,0770	0,0421	0,0573	0,0497	0,0476	0,0418	0,0426
SUMA	2,7971	1,8571	2,3457	2,0924	2,0276	1,8006	2,0034

Tabela 9

Statystyka Andersona–Darlinga dla wielkości obrotów w okresie bezpośrednio poprzedzającym kryzys, wyłuszczone najmniejsze wartości w wierszach

Nazwa	Normalny	Skalowany t-Student	Logist.	Exp. pow.	Hiperb.	NIG	Stabilny
ACCOR	0,3475	0,3818	0,7893	0,3248	0,3832	0,3789	0,3532
AIR FRANCE-KLM	0,4167	0,2988	0,3693	0,3499	0,2941	0,1925	0,2245
AIR LIQUIDE	0,5978	0,1379	0,1969	0,1494	0,1350	0,1081	0,1670
VEOLIA ENVIRONNEMENT	2,5953	1,4657	2,1010	2,1432	1,9839	0,3936	3,0830
VINCI (EX SGE)	0,4593	0,3189	0,3462	0,3529	0,3164	0,3079	0,3309
VIVENDI	1,2641	0,6191	0,8534	0,8415	0,7543	0,2372	0,6631
SUMA	34,4638	21,6288	29,9827	25,4558	19,3435	13,5713	24,1478

Tabela 10

Statystyka Andersona–Darlinga dla wielkości obrotów w okresie kryzysu, wyłuszczone najmniejsze wartości w wierszach

Nazwa	Normalny	Skalowany <i>t</i> -Student	Logist.	Exp. pow.	Hiperb.	NIG	Stabilny
ACCOR	0,4286	0,2110	0,2761	0,2970	0,2011	0,1987	0,1777
AIR FRANCE-KLM	0,9359	0,4820	0,6079	0,7609	0,5686	0,3780	0,3306
AIR LIQUIDE	1,9501	0,7228	1,1642	0,8719	0,2721	0,3148	2,2111
VEOLIA ENVIRONNEMENT	0,8297	0,5601	0,6110	0,6271	0,5727	0,3470	0,4470
VINCI (EX SGE)	1,3029	0,2417	0,5389	0,2712	0,2652	0,2273	0,4027
VIVENDI	1,2821	0,3885	0,5698	0,5695	0,4793	0,3799	0,3540
SUMA	45,3972	17,2974	27,0458	22,1428	18,7913	13,6680	20,6655

Zamieszczone wyżej statystyki wskazują na to, że szukając rozkładu prawdopodobieństwa najlepiej opisującego dzienne stopy zwrotu, należy posłużyć się rozkładem hiperbolicznym jako najlepiej pasującym do danych. Rozważając sumę statystyk Kołmogorowa, na pierwszym miejscu pojawia się rozkład hiperboliczny, drugi jest rozkład NIG; różnice nie są jednak duże. Suma statystyk A^2 jest również mniejsza w przypadku rozkładu hiperbolicznego, NIG jest tutaj również na drugim miejscu. Rozkład hiperboliczny jest też najczęściej wybierany, jeżeli rozważa się dla ilu spółek ma najniższą wartość statystyki Kołmogorowa i Andersona–Darlinga zarówno przed, jak i w czasie trwania kryzysu. Rozpatrując logarytm wielkości obrotów, patrząc na statystykę A^2 , jak i statystykę Kołmogorowa oraz częstość najlepszego dopasowania, na pierwszym miejscu należy postawić NIG. Na drugim miejscu jest rozkład skalowany *t*-Studenta, a dopiero na trzecim miejscu rozkład hiperboliczny.

Przyjrzyjmy się teraz, w jaki sposób zmieniają się parametry rozkładu hiperbolicznego dla stóp zwrotu i parametry rozkładu NIG dla wielkości obrotów w czasie trwania kryzysu finansowego względem poprzedzającego go okresu. Tabela 11 zawiera średnie procentowe zmiany, jakie zaszły w wielkości parametrów rozkładu hiperbolicznego dla stóp zwrotu. Tabela 12 zawiera odpowiednie dane dla rozkładu NIG i wielkości obrotów.

Wyznaczone procentowe zmiany wielkości parametrów i ich odchylenia standardowe wskazują w przypadku stóp zwrotu na dużą zmianę w wielkości parametru skali (znaczne spłaszczenie wykresu), przy jednoczesnym wzroście

grubości ogonów i niewielkim wzroście średniej. Dla logarytmu wielkości obrotów zauważono również zwiększenie ogonów w wykresach gęstości, dodatkowo funkcja gęstości przesuwa się w lewo, a wykres rozciąga pionowo.

Tabela 11

Zmiany w wielkości parametrów rozkładu hiperbolicznego dla wielkości stóp zwrotu

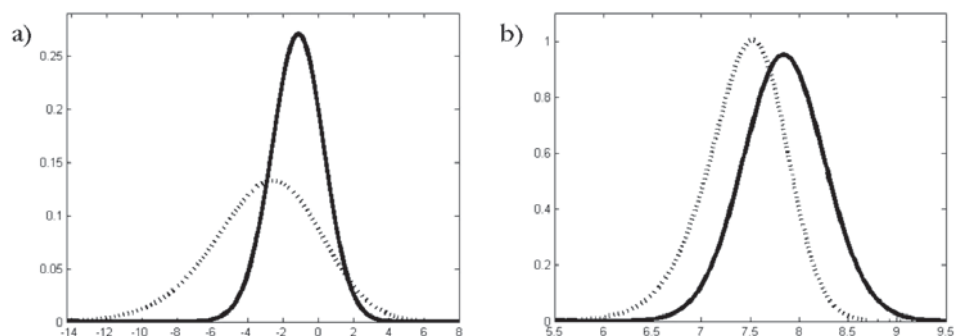
	$\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$	$\beta_1 \rightarrow \beta_2$	$\delta_1 \rightarrow \delta_2$	$\mu_1 \rightarrow \mu_2$
Procentowa zmiana	5,30455	0,105869	62,0038	5,23293
Odchylenie standardowe	6,26887	5,37138	16,9918	34,4940

Tabela 12

Zmiany w wielkości parametrów rozkładu NIG dla wielkości obrotów

	$\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$	$\beta_1 \rightarrow \beta_2$	$\delta_1 \rightarrow \delta_2$	$\mu_1 \rightarrow \mu_2$
Procentowa zmiana	51,2866	45,1917	14,1545	101,678
Odchylenie standardowe	18,0058	207,380	10,6935	1,80654

Powyższe rozważania obrazują wykresy gęstości rozkładów dla uśrednionych wartości parametrów z rozróżnieniem na stopy zwrotu i logarytm wielkości obrotów oraz na okres przed kryzysem i w jego trakcie. Na rysunku 1a przedstawiono wykres gęstości rozkładu stóp zwrotu; linia ciągła odpowiada gęstości przed kryzysem, zaś linia przerywana w czasie kryzysu. Odpowiednio na rysunku 1b przedstawiono podobne wykresy dla logarytmu wielkości obrotów.



Rys. 1. Wielkości stóp zwrotu (a) oraz wielkości obrotów (b); linia ciągła odpowiada okresowi przed kryzysem, linia przerywana w jego trakcie

6. Wnioski

Zaprezentowane w artykule badania rozkładów dziennych stóp zwrotu oraz logarytmu wielkości obrotów spółek indeksu CAC40 paryskiej giełdy wskazują na rozkład NIG jako najlepiej opisujący rzeczywistość, zarówno przed jak i w czasie trwania światowego kryzysu finansowego. Dla rozkładów stóp zwrotu dobrym rozkładem okazał się również rozkład hiperboliczny. Kryzys finansowy w widoczny sposób odbił się na otrzymanych parametrach rozkładu NIG względem ich wcześniejszych wartości. Wielkość obrotów akcjami spółek wyraźnie się zmniejszyła, podobnie jak ich dzienne stopy zwrotu. Wykres gęstość rozkładu stóp zwrotu w okresie kryzysu jest wyraźnie spłaszczony w stosunku do wykresu funkcji gęstości stóp zwrotu sprzed kryzysu. Można także zauważyć dużą różnorodność w zachowaniu poszczególnych spółek. Parametry rozkładu stóp zwrotu części z nich (np. MICHELIN, SANOFI – AVENTIS, SCHNEIDER ELECTRIC, STMICRO-ELECTRONICS) zachowują się w sposób odmienny, losowy. Podobną losowość zaobserwować można dla parametrów rozkładu logarytmu wielkości obrotów (spółki CAP GEMINI, CREDIT AGRICOLE).

Literatura

- [1] Andersen T.G., *Return volatility and trading volume: An information flow interpretation of stochastic volatility*, „Journal of Finance” 1996, Vol. 51, s. 169–204.
- [2] Aparicio F.M., Estrada J., *Empirical Distribution of Stock Returns: European Securities Markets 1990–1995*, „The European Journal of Finance” 2001, Vol. 7, s. 1–21.
- [3] Akgiray V., *Conditional heteroscedasticity in time series of stock returns: evidence and forecasts*, „Journal of Business” 1989, Vol. 62, nr 1, s. 55–80.
- [4] Bachelier L., *Theorie de la speculation*, „Annales de l’Ecole Normale Supérieure” 1900, ser. 3, tome 17, s. 21–86.
- [5] Badrinath S., Chatterjee S., *On measuring skewness and elongation in common stock return distributions: the case of the market index*, „Journal of Business” 1988, Vol. 61, nr 4, s. 451–472.
- [6] Barndorff-Nielsen O., *Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size*, „Proceedings of the Royal Society of London” 1977, Vol. 353, s. 401–419.
- [7] Black F., Scholes M., *The pricing of options and corporate liabilities*, „Journal of Political Economy” 1973, Vol. 81, s. 637–659.
- [8] Blattberg R., Gonedes N., *A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices*, „Journal of Business” 1974, Vol. 47, s. 244–280.

- [9] Bookstaber R., McDonald J., *A general distribution for describing security price returns*, „Journal of Business” 1987, Vol. 60, nr 3, s. 401–424.
- [10] Broca D.S., *The distribution of Indian Stock Returns: A Tale of Two Tails*, „Decision” 2002, Vol. 29, s. 131–137.
- [11] Clark P., *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices*, „Econometrica” 1973, Vol. 41, nr 1, s. 135–155.
- [12] Eberlein E., Keller U., *Hyperbolic distributions in finance*, „Bernoulli” 1995, Vol. 1, s. 281–299.
- [13] Errunza V., Hogan K., Mazumdar S., *Behavior of international stock return distributions: a simple test of functional form*, „International Review of Economics and Finance” 1996, Vol. 5, s. 51–61.
- [14] Fama E.F., *The behavior of stock market prices*, „Journal of Business” 1965, Vol. 38, s. 34–105.
- [15] Gallant R., Rossi P., Tauchen G., *Stock prices and volume*, „Review of Financial Studies” 1992, Vol. 5, s. 199–242.
- [16] Gray J.B., French D.W., *Empirical comparisons of distributional model for stock index prices*, „Journal of Business Finance and Accounting” 1990, Vol. 17, s. 451–459.
- [17] Gurgul H., Mestel R., Wójtowicz T., *Distribution of Volume on the American Stock Market*, „Ekonomia Menedżerska” 2007, s. 143–163.
- [18] Hagerman R., *More evidence on the distribution of stock returns*, „Journal of Finance” 1978, Vol. 33, nr 4, s. 1213–1221.
- [19] Hsu D.-A., Miller R., Wichern D., *On the stable Paretian behavior stock market prices*, „Journal of the American Statistical Association” 1974, Vol. 69, nr 345, s. 108–113.
- [20] Jajuga K., *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, AE, Wrocław 2000.
- [21] Kendall M., *The analysis of economic time-series – Part I: prices*, „Journal of the Royal Statistical Society”, Series A (General), 1953, Vol. 116, nr 1, s. 11–34.
- [22] Kon S. J., *Models of stock returns: a comparison*, „Journal of Finance” 1984, Vol. 39, s. 147–165.
- [23] Koutrouvelis I.A., *Regression-Type Estimation of the Parameters of Stable Laws*, „Journal of the American Statistical Association” 1980, Vol. 75, s. 918–928.
- [24] Kowalewski G., *Badanie rozkładów stóp zwrotu akcji notowanych na GPW w Warszawie*, w: Nowak E., Urbanek M. (red.), *Ekonometryczne modelowanie danych finansowo-księgowych*, Wyd. UMCS, Lublin 1998.
- [25] Küchler U., Neumann K., Sørensen M., Streller A., *Stock returns and hyperbolic distributions*, „Mathematical and Computer Modelling” 1999, Vol. 29, s. 1–15.

- [26] Lin B.-H., Yeh S.-K., *On the distribution and conditional heteroscedasticity in Taiwan stock prices*, „Journal of Multinational Financial Management” 2000, Vol. 10, s. 367–395.
- [27] Mandelbrot B., *The variation of certain speculative prices*, „Journal of Business” 1963, Vol. 36, s. 394–419.
- [28] Osborne M., *Brownian motion in the stock market*, „Operations Research” 1959, Vol. 7, nr 2, s. 145–173.
- [29] Palagyi Z., Mantegna R., *Empirical investigation of stock price dynamics in an emerging market*, „Physica A” 1999, Vol. 269, s. 132–139.
- [30] Peiro A., *International evidence on the distribution of stock returns*, „Applied Financial Economics” 1994, Vol. 4, s. 431–439.
- [31] Peters E., *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997.
- [32] Praetz P.D., *The distribution of share price changes*, „Journal of Business” 1972, Vol. 45, s. 49–55.
- [33] Press S.J., *A compound events model for security prices*, „Journal of Business” 1967, Vol. 45, s. 317–335.
- [34] Sharpe W.F., *Capital asset price: a theory of market equilibrium under conditions of risk*, „Journal of Finance” 1964, Vol. 19, s. 435–442.
- [35] Smith J.B., *The probability distribution of market returns: A logistic hypothesis*, PhD dissertation, University of Utah.
- [36] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.