GEOLOGIA • 2009 • Tom 35 • Zeszyt 2/1 • 167–174

# TRÓJWYMIAROWE MODELOWANIE WARTOŚCI PARAMETRÓW ZŁOŻOWYCH METODĄ KRIGINGU ZWYCZAJNEGO 3D

## 3D modelling of deposit parameters using ordinary kriging

**Jacek MUCHA & Monika WASILEWSKA**

*Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geologii, Geofizyki i Ochrony Środowiska,*
*Katedra Geologii Złożowej i Górniczej;*
*30-059 Kraków, al. Mickiewicza 30;*
*e-mail: mucha@geol.agh.edu.pl, monika.wasilewska@agh.edu.pl*

**Abstract:** The principles of 3D modelling of deposit parameters by means of geostatistical procedure of 3D ordinary kriging were outlined. The use of the procedure was illustrated by example of Cu content assessment in exploitation blocks in a one of the deposits Cu-Ag from Fore-Sudetic Monocline. A new classification of accuracy of mean Cu content estimation in exploitation blocks was proposed.

**Key words:** 3D modelling, semivariograms, 3D kriging, Cu deposits

**Słowa kluczowe:** modelowanie 3D, semiwariogramy, kriging 3D, złoża Cu

## WPROWADZENIE

W bieżącej praktyce dokumentowania zasobów i jakości kopaliny, złoża, z nielicznymi wyjątkami, traktowane są jako ciała dwuwymiarowe. Takie podejście jest w pełni uzasadnione przy szacowaniu zasobów w skali całego złoża lub jego znacznych części, lecz mało przydatne dla potrzeb prognozy parametrów kopaliny w elementarnych partiach złoża przeznaczonych do wydobycia (blokach eksploatacyjnych), zazwyczaj znikomo małych w porównaniu z rozmiarami złoża. Ograniczenia techniczne eksploatacji, a w szczególności brak możliwości elastycznego dopasowania furty do zmieniającej się miąższości złoża jak również zmian przebiegu powierzchni stropowych i spągowych złoża, powodują konieczność dokonywania przybierek skał płonnych. Skutkuje to zazwyczaj znaczącymi różnicami w oszacowaniach zawartości składników w złożu bilansowym i urobku. Czynnik ten jest w wielu kopalniach poważnym źródłem trudności w zbilansowaniu i rozliczeniu produkcji. Dwuwymiarowe modelowanie rozmieszczenia wartości parametrów złożowych nie daje możliwości szybkiej i wiarygodnej prognozy jakości urobku.

Niedoskonałość dwuwymiarowej prezentacji parametrów złożowych może być w dużym stopniu usunięta przez zastosowanie trójwymiarowego modelowania rozmieszczenia

zawartości składników użytecznych i szkodliwych w złożu bilansowym oraz jego najbliższym otoczeniu, opartego na geostatystycznej procedurze krigingu zwyczajnego 3D. Ułatwia ono ustalenie optymalnego scenariusza eksploatacji uśredniającej, uwzględniającego m.in. wielkość i kolejność wybierania poszczególnych części złoża oraz przyczynia się do istotnego zmniejszenia rozbieżności między prognozą jakości urobku i danymi kontroli produkcji.

## ZASADY KRIGINGU 3D

Szacowanie metodą krigingu 3D wartości parametrów złożowych w punktach lub małych blokach (tzw. miniblokach) zlokalizowanych w przestrzeni złożowej jest procedurą wieloetapową obejmującą:

1) regularyzację próbek cząstkowych (odcinkowych) pobieranych z wyrobisk górniczych lub rdzeni wiertniczych mającą na celu ujednolicenie ich długości oraz obliczenie zawartości składników w próbkach zregularyzowanych w oparciu o algorytm średniej ważonej na długość próbek składowych;
2) opis struktury zmienności przestrzennej za pomocą semiwariogramów kierunkowych, które wyrażają zróżnicowanie wartości parametru w różnych kierunkach badania oraz zilustrowanie jej za pomocą indykatrysy zmienności. Analiza indykatrysy zmienności i porównanie wykresów semiwariogramów kierunkowych pozwalają rozstrzygnąć kwestię czy zmienność badanego parametru ma charakter anizotropowy czy izotropowy;
3) Przybliżenie semiwariogramów za pomocą autoryzowanych funkcji analitycznych stanowiących geostatystyczne (teoretyczne) modele zmienności, które są niezbędne do szacowania wartości parametru w procedurze krigingu;
4) Szacowanie wartości parametrów w węzłach założonej sieci interpolacyjnej lub w miniblokach ( $z_{iK}^{*}$ ) za pomocą liniowego interpolatora opartego na średniej ważonej. Współczynniki wagowe określa się z układu równań krigingu (Journel, Huijbregts 1978, s. 306), który uwzględnia wzajemną konfigurację punktów opróbowań biorących udział w interpolacji oraz usytuowanie tych punktów względem węzła sieci interpolacyjnej, a także ustalony wcześniej model zróżnicowania parametrów;
5) Prognozę wielkości błędu szacowania parametru w punktach lub miniblokach, zwanego błędem standardowym krigingu ($KSD_i$), z formuły uwzględniającej model zmienności parametru, lokalizację zregularyzowanych próbek cząstkowych w przestrzeni złożowej i kształt oraz wielkość minibloku. Jego wielkość wyznacza przedział [$-KSD_i$, $KSD_i$], w obrębie którego winno się mieścić około 68% błędów rzeczywistych oszacowań, przy założeniu normalności ich rozkładu. W praktyce, dla celów porównawczych, wygodniej jest posługiwać się wyrażonym w procentach względnym (relatywnym) błędem standardowym krigingu $RKSD_i$, otrzymanym jako iloraz błędu bezwzględnego krigingu KSDi i oszacowanej wartości parametru $z_{iK}^{*}$ .

## PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA KRIGINGU 3D

Procedurę krigingu zwyczajnego 3D zastosowano do modelowania przestrzennego zawartości Cu we fragmencie jednego ze złóż LGOM, który miał formę prostopadłościanu o rozmiarach: 200×200×3.8 m. Próbki cząstkowe (odcinkowe) o zróżnicowanych długościach, pobra-

ne z ociosów wyrobisk górniczych wzdłuż linii pionowej, zregularyzowano do próbek o jednakowej długości 0.2 m. Średnia odległość między opróbowanymi profilami w płaszczyźnie poziomej wynosiła około 20 m. Semiwariogramy kierunkowe zawartości metalu wraz z dopasowanymi do nich modelami (Fig. 1) opisują zróżnicowanie zawartości Cu w kierunku pionowym oraz w kierunku maksymalnej i minimalnej zmienności na płaszczyźnie poziomej. Indykatrysa zmienności poziomej ujawnia słabą anizotropię parametru w tej płaszczyźnie a porównanie wszystkich semiwariogramów kierunkowych dowodzi wyraźnie większej zmienności Cu w kierunku pionowym niż w płaszczyźnie poziomej, czego można było oczekiwać, biorąc pod uwagę poziome ułożenie serii litologicznych goszczących kruszce.

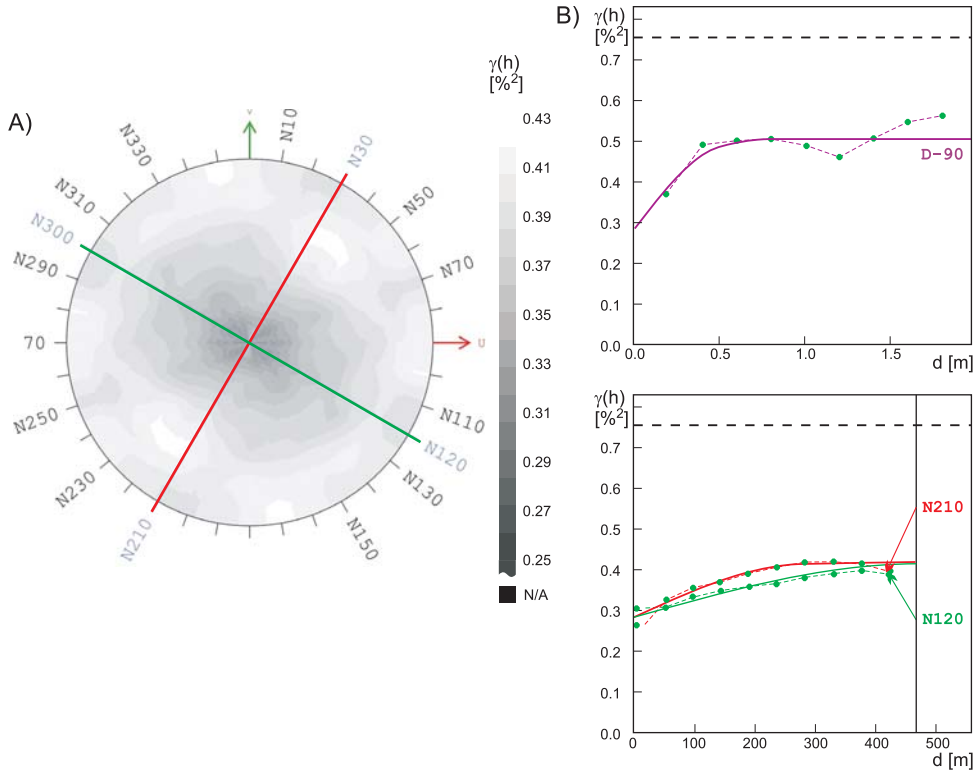


**Fig. 1.** A) Indykatrysa zmienności zawartości Cu w płaszczyźnie poziomej; B) Modele semiwariogramów kierunkowych: pionowego D-90 i poziomych N210 (minimalna zmienność) oraz N210 (maksymalna zmienność)

**Fig. 1.** A) Map of directional, horizontal semivariograms of Cu content; B) Directional semivariograms of Cu content: vertical D-90, horizontal N120 (direction of minimal variability) and horizontal N210 (direction of maximal variability)

Zawartości Cu oszacowano w węzłach regularnej sieci punktów interpolacyjnych o rozmiarach: 1×1×0.2 m wykorzystując geostatystyczne modele zmienności (Fig. 1). Rozstaw pionowy punktów interpolacji (0.2 m) dostosowano do długości zregularyzowanych próbek cząstkowych, natomiast przyjęcie poziomego rozstawu 1×1 m miało zapewnić dość dokładne

okonturowanie złoża bilansowego w płaszczyźnie pionowej. W oszacowaniach zawartości Cu w każdym punkcie interpolacyjnym uwzględniano oznaczenia metalu w 8 najbliższych próbkach zregularyzowanych (po dwie próbki z każdej ćwiartki koła o środku zlokalizowanym w punkcie interpolacji). Uzyskany przy wykorzystaniu programu ISATIS (wersja 8.04, 2008) model rozmieszczenia zawartości Cu w przestrzeni złożowej (Fig. 2) pokazuje wyraźne zróżnicowanie zawartości metalu, szczególnie w obrębie serii łupkowej.

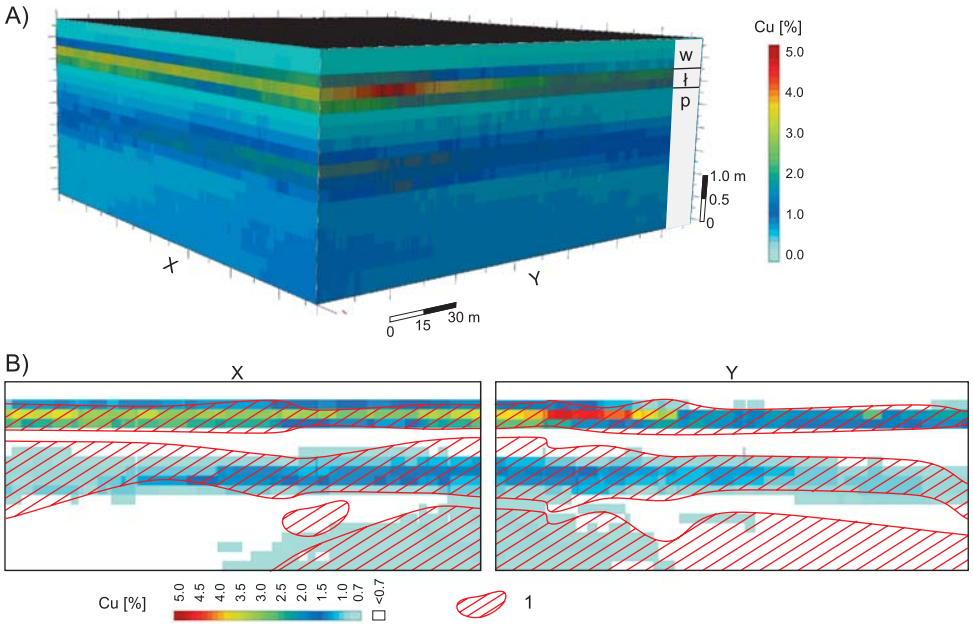


**Fig. 2.** A) Model przestrzenny zawartości Cu we fragmencie jednego ze złóż LGOM; B) Granice stref o zawartościach Cu >0.7% na ścianach X i Y określone metodą krigingu 3D i metodą tradycyjną (1); w – seria węglanowa, ł – seria łupkowa, p – seria piaskowcowa

**Fig. 2.** A) 3D model of distribution of Cu content in a part of one of the deposits from Fore-Sudetic Monocline; B) The boundaries of zones with Cu content >0.7% defined using kriging 3D and traditional method (1); w – dolomite ore, ł – black shale ore, p – sandstone ore

Wersja numeryczna modelu umożliwia błyskawiczne obliczenie średniej zwartości metalu w bloku o dowolnym kształcie i wielkości przez proste uśrednienie arytmetyczne oszacowań w punktach interpolacji objętych konturem tego bloku. Analiza oszacowań dla bloków obliczeniowych o zróżnicowanej geometrii i rozmiarach ułatwia podjęcie decyzji, co do optymalnych rozmiarów bloków eksploatacyjnych. Błąd oszacowań zawartości metalu w blokach eksploatacyjnych nie może być oceniony bezpośrednio przez kombinację błędów oszacowań w punktach interpolacji ze względu na ich silne skorelowanie. Błąd taki dla indywidualnego bloku wyznacza się przy zastosowaniu jednego z wariantów krigingu zwyczajnego 3D zwanego krigingiem poligonowym. W dolnej części figury 2 zestawiono przykład wyznaczenia stref o zawartościach Cu>0.7% na dwóch ścianach bloku obliczeniowego przy zastosowaniu procedury krigingu 3D (w oparciu o wszystkie dane) i metodą tradycyjną (odręcznie) na pod-

stawie analiz próbek cząstkowych pobranych z tych ścian oraz z uwagi na ich małą liczbę dodatkowo próbek pobranych w ich najbliższej odległości (do 5 m). Porównanie konturów stref wyznaczonych obiema metodami wykazuje dość duże różnice, szczególnie w dolnej części ściany Y. Można z wysokim prawdopodobieństwem założyć, że dokładniejsze okonturowanie stref daje metoda krigingu 3D z uwagi na to, że uwzględnia wzajemne skorelowanie obserwacji oraz ich lokalizację względem bloku obliczeniowego.

Stosując kriging poligonowy zbadano dokładność oszacowań średnich zawartości Cu w blokach obliczeniowych, o różnych powierzchniach w planie i stałej wysokości 3.8 m, wydzielonych z bloku pierwotnego (Tab. 1, Fig. 3).

**Tabela (Table) 1**

Dokładność szacowania średniej zawartości Cu w blokach

*Accuracy of mean Cu content estimations in blocks*

| Rozmiary bloku [m] *Block dimensions [m]* | Liczba bloków *Number of blocks* | Błędy względne oceny średniej zawartości Cu [%] *Relative kriging standard deviation RKSD [%]* | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Średni *Mean* | Minimalny *Minimum* | Maksymalny *Maximum* |
| 10×10×3.8 | 163 | 39.8 | 18.6 | 81.4 |
| 20×20×3.8 | 97 | 34.9 | 14.8 | 53.0 |
| 100×100×3.8 | 4 | 12.2 | 10.0 | 14.1 |
| 200×200×3.8 | 1 | 7.7 | – | – |

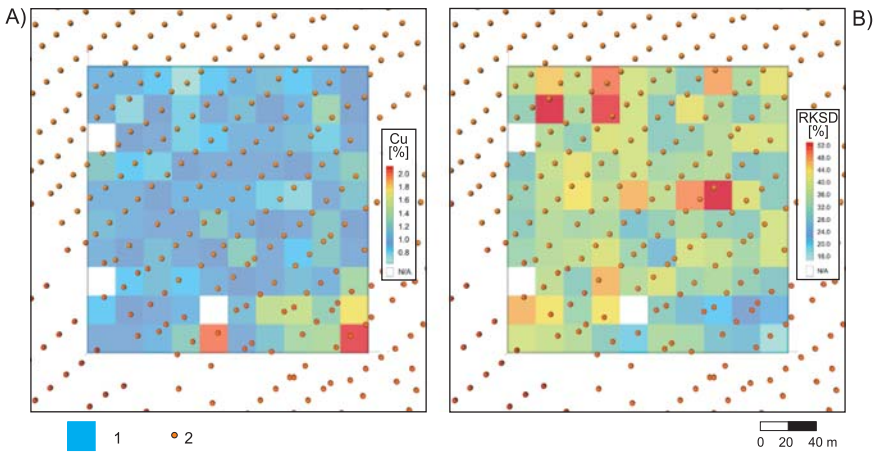


**Fig. 3.** Mapy 2D oszacowanych zawartości Cu (A) oraz względnych błędów krigingu (B) w blokach o wymiarach 20×20×3.8 m; 1 – bloki, 2 – lokalizacja punktów opróbowań

**Fig. 3.** 2D maps of estimated mean Cu contents (A) and relative kriging standard deviations RKSD (B) within the blocks 20×20×3.8 m; 1 – blocks, 2 – location of samples sites

Względne błędy standardowe (krigingu) dla bloków o rozmiarach poziomych 10×10 m i 20×20 m są duże i wynoszą przeciętnie około 35÷40% przy szerokim zróżnicowaniu błędów skrajnych od 15 do 80%. Błędy standardowe bezwzględne dla parcel 20×20 m są mało zróżni-

cowane od 0.29% do 0.39% Cu (ze średnią 0.35%). Znacznie większy rozrzut błędów bezwzględnych od 0.11% do 0.50%, przy zbliżonej średniej wartości (0.42%) uzyskała Namysłowska-Wilczyńska (2007) przy szacowaniu zawartości Cu w blokach: 50×50×10 m w porfirowym złożu Cu Rio Blanco (Peru). Przy aktualnym rozstawie opróbowania dostateczną dokładność oszacowania zawartości Cu z względnymi błędami skrajnymi 10÷15%, uzyskuje się dopiero dla bloków obliczeniowych o rozmiarach 100×100×3.8 m a dla całego rozpatrywanego fragmentu złoża (200×200×3.8 m) dokładność można uznać za satysfakcjonują z błędem standardowym 8%.

Bloki obliczeniowe o rozmiarach 20×20×3.8 m są zbliżone do rozmiarów przeciętnych bloków eksploatacyjnych. Ich klasyfikacja z punktu widzenia dokładności oszacowania Cu, oparta na wielkości relatywnego, standardowego błędu krigingu nie jest wystarczająca, w szczególności przy oszacowaniach zawartości Cu bliskich zawartości brzeżnej. Według Royle'a (Annels 1991) dodatkowym kryterium klasyfikacji winno być prawdopodobieństwo, że zawartości rzeczywiste Cu będą większe od zawartości brzeżnej. Takie prawdopodobieństwo określono dla wszystkich bloków 20×20×3.8 m, przyjmując dotychczasową zawartość brzeżną Cu w złożach LGOM równą 0.7% i założenie normalności rozkładu błędów. Dla rozpatrywanych bloków eksploatacyjnych prawdopodobieństwo to (P[Cu>0.7%]) przyjmuje szeroki zakres wartości z przedziału 42÷100% (Fig. 4A) i jest silnie skorelowane liniowo z relatywnym błędem standardowym krigingu (RKSD) w zakresie 42÷99% (Fig. 4B).

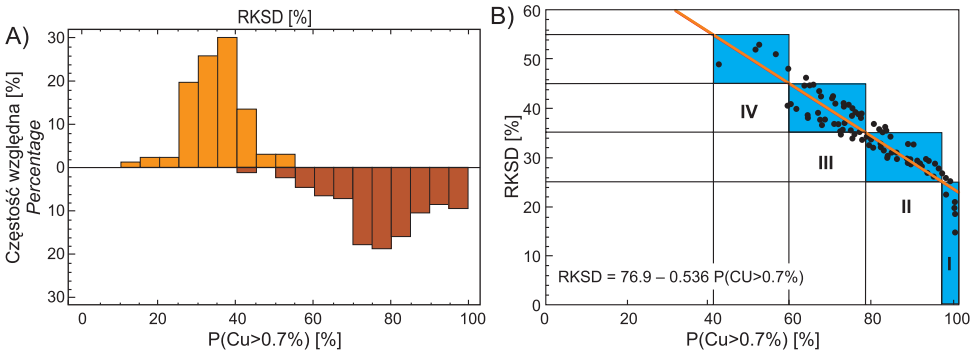


**Fig. 4.** A – Histogramy relatywnych, standardowych błędów oszacowań zawartości Cu (RKSD) i prawdopodobieństwa, że rzeczywista zawartość Cu jest większa od 0.7% P[Cu > 0.7%] w blokach 20×20×3.8 m; B – Diagram zależności RKSD i P[Cu > 0.7%]

**Fig. 4.** A – Histograms of relative kriging standard deviations of mean Cu estimation (RKDS) and probability that the true mean Cu content > 0.7% within the blocks 20×20×3.8 m (P[Cu>0.7%]); B – Plot of dependence between RKSD and P[Cu>0.7%]

Z punktu widzenia dokładności oszacowań Cu można wstępnie zaproponować wyróżnienie 4 kategorii bloków eksploatacyjnych: I – dobrze rozpoznane (RKSD<25%, P>95%), II – przeciętnie rozpoznane (25%<RKSD<35%, 80<P<95%), III – słabo rozpoznane (35% <RKSD<45%, 60< P<80%), IV – niedostatecznie rozpoznane (RKSD>45%, P<60%). Podane wartości graniczne RKSD mogą się wydawać wysokie, ale należy mieć na względzie fakt, że elementarnym cyklem rozliczania produkcji w kopalniach jest cykl miesięczny. W tym czasie przedmiotem eksploatacji jest z reguły kilkanaście–kilkadziesiąt bloków, a błąd oszacowania jakości kopaliny przewidzianej do wydobycia w tym okresie będzie znacznie mniej-

szy. Predykcja jego wielkości jest jednak trudna z uwagi na skorelowanie wartości błędów oszacowań zawartości Cu w blisko położonych blokach eksploatacyjnych, a podanie przybliżonych rozwiązań tego zagadnienia wykracza poza ramy artykułu. Należy jednak zauważyć, że niektóre propozycje klasyfikacji dokładności rozpoznania zasobów złóż dopuszczają jeszcze bardziej liberalne wielkości dopuszczalnych błędów. Blackwell w odniesieniu do porfirowych złóż miedzi sugeruje przyjęcie następujących wartości granicznych RKSD: < 30% dla zasobów pomierzonych – zbadanych (*measured*), 30÷50% dla zasobów wykazanych (*indicated*) i >50% dla zasobów przypuszczalnych (*inferred*) (Sinclair & Blackwell 2002).

## PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Geostatystyczna procedura kriginu zwyczajnego 3D jest efektywnym narzędziem szacowania wartości parametrów złoża bilansowego, a przede wszystkim prognozy zawartości składników użytecznych i szkodliwych w urobku. Celowe jest rekomendowanie jej wdrożenia w polskich kopalniach złóż rozpoznanych przestrzenną siecią opróbowań w wyrobiskach górniczych (np. złoża Cu-Ag LGOM) lub w otworach wiertniczych (np. złoża węgla brunatnego, wapieni). Procedura krigingu 3D na tle jej deterministycznych odpowiedników (np. metody interpolacyjnej z wagowaniem na odwrotność odległości) wyróżnia się kilkoma zaletami, do których należą przede wszystkim: uwzględnianie przestrzennej struktury zmienności parametrów, uzależnienie wyników oszacowań od wzajemnej konfiguracji punktów opróbowań w przestrzeni złożowej i ich lokalizacji względem bloku obliczeniowego oraz możliwość oceny błędów oszacowań w bryłach o dowolnej wielkości i kształcie.

Jest ona jednak bardziej skomplikowana niż metody deterministyczne, gdyż wymaga wiarygodnego modelu przestrzennego zróżnicowania szacowanego parametru, którego skonstruowanie na ogół nie jest łatwe i musi być poparte pewnym doświadczeniem w modelowaniu geostatystycznym. Trudne jest również ustalenie zasad optymalnego doboru prób uwzględnianych w szacowaniu wartości parametrów w punktach sieci interpolacyjnej lub miniblokach. Najczęściej dochodzi się do nich metodą prób i błędów. W sferze metodycznej dalszego polepszenia dokładności oszacowań można oczekiwać przy zastosowaniu bardziej zaawansowanych, nieparametrycznych wariantów krigingu 3D takich jak kriging indykatorowy lub proporcjonalny. W badaniach parametrów polskich złóż kriging nieparametryczny stosowany był dotychczas jedynie w wersji 2D (Mucha & Wasilewska 2006).

Należy również zwrócić uwagę na możliwości zastosowania krigingu 3D jako podstawy metodycznej klasyfikacji parcel eksploatacyjnych z punktu widzenia dokładności szacowania w ich obrębie średnich wartości parametrów złożowych i zasobów kopaliny.

*Praca sfinansowana z badań statutowych AGH w roku 2009, nr 11.11.140. 562.*

*Praca była prezentowana na Sesji Naukowej organizowanej przez Katedrę Mineralogii, Petrografii i Geochemii pt. „90 lat Katedry Mineralogii, Petrografii i Geochemii w AGH”.*

## LITERATURA

Annels A.B., 1991. *Mineral Deposit Evaluation*. Kluwer, London, 1–436.

Journel A.G. & Huijbregts Ch.J., 1978. *Mining Geostatistics*. Academic Press, London – New York – San Francisco, 1–600.

Mucha J. & Wasilewska M., 2006. Nieparametryczne metody geostatystyczne interpolacji parametrów złożowych. *Przegląd Górniczy*, 1, 24–30.

Namysłowska-Wilczyńska B., 2007. Analizy przestrzenne z zastosowaniem metod geostatystycznych (Modelowanie 3D porfirowego złoża miedzi Rio Blanco w Peru). *Roczniki Geomatyki (Annals of Geomatics)*, 5, 1, 91–103.

Sinclair A.J. & Blackwell G.H., 2002. *Applied Mineral Inventory Estimation*. Cambridge University Press, 1–381.