

*Tadeusz Tumidajski\*, Daniel Saramak\*, Tomasz Niedoba\**

## MATEMATYCZNE ASPEKTY OPISU I OCENY WZBOGACALNOŚCI RUD MIEDZI

---

### 1. Wstęp

Wyniki wzbogacania zależą od właściwości nadawy, pracy urządzenia wzbogacającego oraz od sposobu przygotowania rudy do procesów rozdziału. Istnieje jednak potrzeba określenia przebiegu wzbogacania niezależnie od jakości separatora oraz sposobu jego przygotowania i prowadzenia.

Tak postawione zadanie nazywa się oceną wzbogacalności (podatności na wzbogacanie) rud lub węgla metodą oceny generalnie rzecz biorąc jest określenie krzywych (funkcji) przedstawiających zależność wychodu lub uzysku składnika użytecznego, np. miedzi w koncentracji, które nazywa się krzywymi (funkcjami) wzbogacania lub wzbogacalności. Sposoby uzyskiwania odpowiednich danych do konstrukcji tych krzywych czyli sposoby określania flotowalności są przedmiotem wielu modyfikacji (najbardziej znane metody Della i Croziera), a wariantów prezentacji tych krzywych jest wiele (krzywe Henry'ego, Mayera, Halla, Fuerstenaua i inne) [1, 3, 5–7, 8, 10, 13].

Jedną z możliwości do uzyskania odpowiedzi z wyznaczonych krzywych wzbogacalności jest ustalenie minimalnego możliwego do osiągnięcia poziomu strat, czyli minimalnej ilości metalu kierowanej do odpadów [11].

Tak rozumianą minimalizację można nazwać optymalizacją technologiczną przebiegu procesów wzbogacania. Taka optymalizacja nie jest równoznaczna z optymalizacją rozumianą jako maksymalizacja zysku, czyli różnicy pomiędzy przychodami i kosztami. Obydwa podejścia opierają się jednak na określeniu zależności wychodu oraz zawartości metalu (miedzi) w koncentracji.

W artykule przedstawiono wybrane problemy związane z analizą wzbogacalności krajowych rud miedzi z rejonu LGOM i propozycje ich rozwiązania.

---

\* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

## 2. Przegląd podstawowych krzywych wzbogacalności

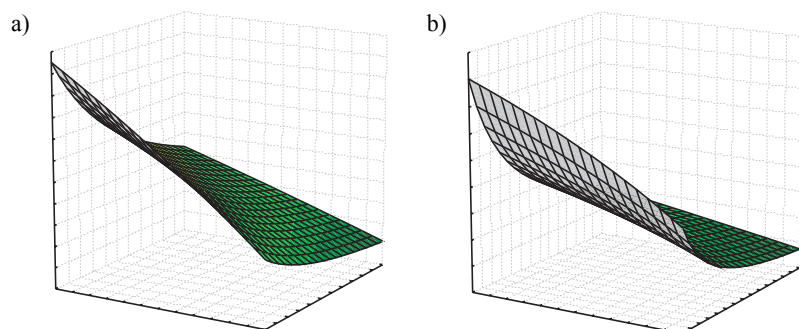
Fundamentalnym prawem, które rządzi przeróbką surowców mineralnych jest prawo zachowania masy znane w postaci równania bilansu

$$100\alpha = \gamma\beta + (100 - \gamma)\vartheta \quad (1)$$

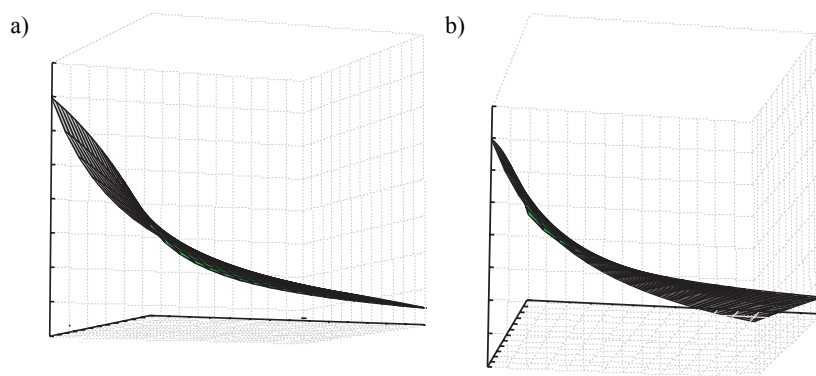
gdzie:

- $\alpha$  — średnia zawartość odzyskiwanego składnika w nadawie, %,
- $\beta$  — średnia zawartość odzyskiwanego składnika w koncentracie, %,
- $\vartheta$  — średnia zawartość odzyskiwanego składnika w odpadach, %.

Jak wykazano [16] równanie to przedstawia geometrycznie paraboloidę hiperboliczną (rys. 1a, 1b), która po zrzutowaniu na płaszczyznę układu  $(\gamma, \beta)$  daje zależność hiperboliczną pomiędzy wielkościami  $\gamma$  oraz  $\beta$  (rys. 2a, 2b).



Rys. 1. Geometryczny obraz równania bilansu jako funkcji dwóch zmiennych niezależnych  $\beta$  i  $\vartheta$ :  
a) dla  $\alpha = 2\%$ ; b) dla  $\alpha = 1,5\%$



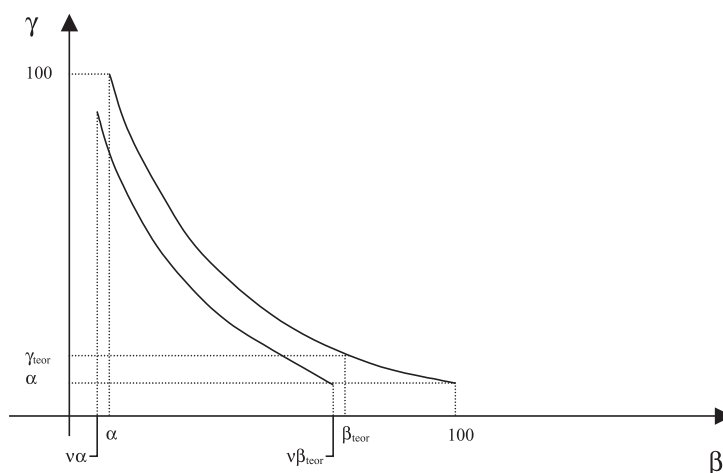
Rys. 2. Rzut powierzchni z rysunku 1 na płaszczyznę  $(\beta - \gamma)$ : a)  $\alpha = 2\%$ ; b)  $\alpha = 1,5\%$

Krzywa, która reprezentuje rzeczywisty przebieg wzbogacania (lub rozdziału w skali laboratoryjnej) leży na paraboloidzie hiperbolicznej i jest zależna od przygotowania nadawy reprezentowanego przez stopień uwolnienia minerałów użytecznych oraz zdolność stosowanej operacji wzbogacania do przeprowadzenia minerałów z nadawy do koncentratu. Sposób konstrukcji krzywych wzbogalności zakłada idealny podział na ustalone w określonej kolejności frakcje i pozwala na ciągłą reprezentację tych krzywych. Maksymalną zawartością metalu w koncentracie jest stechiometryczna zawartość metalu w minerałach ( $\beta_{\text{teor}}$ ) w koncentracie o wychodzie równym  $\gamma_{\text{teor}}$  (ułamkowi masy minerałów użytecznych w nadawie). Zależność  $\gamma = \gamma(\beta)$  można opisać hiperbolą w postaci  $\gamma = \frac{a}{\beta} + b$  lub  $\gamma = \frac{A}{\beta}$ . Graniczną krzywą zbioru możliwych hiperbol jest hiperbola wynikająca z równania bilansu po przyjęciu  $\vartheta = 0$ , co oznacza wzbogacanie idealne czyli przeprowadzenie wszystkich minerałów miedzi do koncentratu

$$\gamma = \frac{100\alpha}{\beta} \quad (2)$$

Z teoretycznego punktu widzenia krańcowymi punktami tej krzywej są punkty  $(\alpha, 100)$  oraz  $(100, \alpha)$  (czyli brak wzbogacania oraz wzbogacanie zupełne (do czystej miedzi)). Na tej krzywej znajduje się także punkt  $(\beta_{\text{teor}}, \gamma_{\text{teor}})$ , który podaje zawartość miedzi w koncentracie składającego się tylko z czystych minerałów miedzi. Punkt ten można nazwać punktem sterującym wyborem wykresu hiperboli.

Wiadomo, że o poziomie odzysku decyduje stopień uwolnienia (odzyskiwalności) minerałów (rozumiany jak wyżej) i dlatego „poprawiona” krzywa  $\gamma = \gamma(\beta)$  jest hiperbolą przesuniętą w dół w porównaniu z wyjściową hiperbolą (rys. 3).



Rys. 3. Graficzny obraz przebiegu procesu wzbogacania wraz z punktami kluczowymi

Takie podejście do opisu zależności  $\gamma = \gamma(\beta)$  może być przydatne przede wszystkim w opracowywaniu funkcji celu w modelach ekonometrycznych z zakresu programowania matematycznego. Przybliżone przebiegi tych krzywych pozwalają określać granice i przybliżone zawartości miedzi w koncentratkach maksymalizujące zysk układu zakładów wzbogacania.

Ocena wzbogalności danej rudy powinna dawać prognozy i oceny rzeczywistego wzbogacania w warunkach przemysłowych, przy przyjęciu pewnych założeń odnośnie jakości przygotowania rudy oraz ustalonych warunków przebiegu procesów wzbogacania. Jedną z możliwości uzyskania informacji odnośnie wzbogalności jest ustalenie minimalnego możliwego do osiągnięcia poziomu strat. Oznacza to takie prowadzenie procesu wzbogacania rudy, przy którym zawartość składnika użytecznego w odpadach  $\vartheta$  jest minimalna.

Najprostszą i najbardziej naturalną definicją wzbogalności może być wskaźnik  $E$  zaproponowany przez Taggarta i Jowetta [9, 14]:

$$E = \frac{\text{odzyskana ilość składnika}}{\text{odzyskiwalna ilość składnika}} 100\%.$$

Kontynuując te rozważania, Madej [11] wprowadził funkcję strat jednostkowych w następującej postaci

$$g(\alpha, \beta, \vartheta) = \frac{1 - \varepsilon}{\beta - \alpha} = \frac{\eta}{\beta - \alpha} = \frac{\vartheta}{(\beta - \vartheta)\alpha} \quad (3)$$

odnosząc straty składnika w odpadach do rzeczywistego przyrostu zawartości składnika w koncentracie  $(\beta - \alpha)$ .

W warunkach laboratoryjnych oraz półtechnicznych prowadzi się badania produktów końcowych procesu wzbogacania czyli koncentratu i odpadów. Przeprowadzane są analizy flotacyjne przy użyciu techniki Della [4], które zależą od rozdziału składnika użytecznego od skały płonej związanej ze stopniem hydrofobizacji powierzchni. Poprzez stopniowe dodawanie odczynników flotacyjnych oraz sekwencyjne zbieranie produktu pianowego uzyskuje się kilka frakcji. Kolejne frakcje mają coraz mniejsze zawartości składnika użytecznego, ponieważ bogatsze ziarna przechodzą do produktu pianowego (koncentratu) szybciej niż uboższe. Jest więc możliwe uzyskanie krzywej wzbogalności czyli zależności  $\gamma = f(\beta)$  lub  $\varepsilon = h(\beta)$ . Okazało się [11], że zależność funkcji strat  $g(\alpha, \beta, \vartheta)$  od  $\beta - \alpha$  ma postać paraboli tzn.

$$g(\alpha, \beta, \vartheta) = \frac{\vartheta}{(\beta - \vartheta)\alpha} = a(\beta - \alpha)^2 + b(\beta - \alpha) + c \quad (4)$$

gdzie  $a > 0$ .

Funkcja  $g(\beta, \alpha, \vartheta)$  osiąga więc minimum dla skończonej wartości  $(\beta - \alpha)$ . Ta wartość wskazuje zawartość  $\beta$  w koncentracji, przy której osiąga się minimalne straty metalu w odpadach (tzw. minimum technologiczne). Minimalna wartość  $\alpha - \beta$  wynosi  $-\frac{b}{2a}$ .

W Instytucie Metali Nieżelaznych w Gliwicach dla rud polkowickich uzyskano zależność

$$\frac{\vartheta}{(\beta - \vartheta)\alpha} = 0,0035(\beta - \alpha)^2 - 0,1749(\beta - \alpha) + 2,6296 \quad (5)$$

czyli przy  $\alpha = 2\%$  uzyskano

$$(\beta - \alpha) = \frac{0,1749}{2 \cdot 0,0035} = 24,99$$

czyli  $\beta_{\text{opt}} = 26,99\%$ ,  $\varepsilon_{\text{opt}} = 88,89\%$  oraz  $\vartheta_{\text{opt}} = 0,238\%$ .

Warto zwrócić uwagę na to, że funkcja  $g(\alpha, \beta, \vartheta)$  jest uzależniona od  $(\beta - \alpha)$  czyli, że straty są odnoszone do rzeczywistego przyrostu koncentracji metalu w koncentracji.

Podobne podejście zostało zastosowane przez Halla [8] przy określaniu jego krzywej wzbogacalności otrzymywanej empirycznie także procedurą Della. Zdefiniował on krzywą wzbogacalności parametrycznie, czyli przyjął

$$\begin{cases} x = \beta \\ y = \varepsilon \end{cases} \quad (6)$$

i chcąc uzyskać funkcję, której argumenty i wartości należą do przedziału  $\langle 0,100 \rangle$ , wprowadził modyfikację zmiennych

$$\begin{cases} x = 100 - \varepsilon \\ y = 100 \frac{\beta_t - \beta}{\beta_t - \alpha} \end{cases} \quad (7)$$

co poprzez zastosowanie obrotu tej krzywej pozwoliło mu uzyskać krzywą podobną do klasycznej hiperboli  $y = \frac{B}{x + C} - A$  (rys. 4).

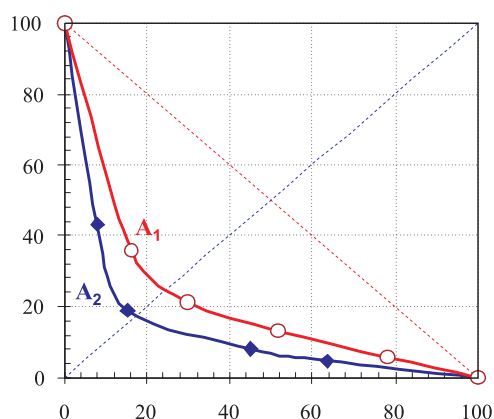
Ponieważ krzywa ta (hiperbola) przechodzi przez punkty (0,100) oraz (100,0), zależność  $\beta(\varepsilon)$  ma postać

$$\beta = \beta_t - \frac{\beta_t - \alpha}{100} \left( \frac{A\varepsilon}{100 + A + \varepsilon} \right) \quad (8)$$

a wychód jednostkowy  $W = \frac{100\alpha}{\gamma}$  wynosi

$$W = \frac{100\varepsilon}{\beta_t - \frac{\beta_t - \alpha}{100} \left( \frac{A\varepsilon}{100 + A + \varepsilon} \right)} \quad (9)$$

Parametr  $A$  odgrywa rolę współczynnika związanego ze stopniem uwolnienia ziarn minerałów użytecznych.



Rys. 4. Zmodyfikowane krzywe Halla

Symetryzacja krzywej wzbogacalności służy interpretacji łatwości wzbogacania — punkt przecięcia krzywej z przekątną jest punktem przejścia z łatwego wzbogacania do trudnego. Taką samą rolę może pełnić punkt charakteryzujący się największą krzywizną, czyli najmniejszym promieniem krzywizny. Dla krzywych zapisanych parametrycznie  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  promień krzywizny wyraża się wzorem

$$R = \frac{\left[ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|} \quad (10)$$

Okazuje się, że dla krzywej Della

$$\begin{cases} x = \beta \\ y = \frac{\alpha - \vartheta}{\beta - \vartheta} 100 = \gamma \end{cases} \quad (11)$$

minimalny promień krzywizny uzyskuje się dla  $\beta = \vartheta + \sqrt{(\alpha - \vartheta)100}$ , a dla krzywej

$$\begin{cases} x = \beta \\ y = \varepsilon \end{cases} \quad (12)$$

minimalny promień wynosi  $\beta = \vartheta + \sqrt{(\alpha - \vartheta)\frac{\vartheta}{\alpha}100}$ .

Można zauważyć jednak, że taka interpretacja jest utrudniona ponieważ do wyznaczenia wartości minimalnych  $\beta$  potrzebne jest przyjęcie wartości  $\alpha$  i  $\vartheta$ , które nie są niezależne.

### 3. Specyfika badań wzbogacalności polskich rud miedzi

Przedstawione wyżej problemy są względnie łatwe do interpretacji, gdy bada się rudy jednorodne pod względem składu litologicznego i mineralogicznego. Polskie rudy miedzi są konglomeratem trzech warstw litologicznych (węglanów, łupków i piaskowców) oraz zawierają kilka minerałów miedzionośnych.

Zgodnie z wynikami badań Butry [2], Sałackiego i innych podstawową krzywą wzbogacalności  $\lambda$  w furcie eksploatacyjnej można opisać trójnormowo (rys. 5):

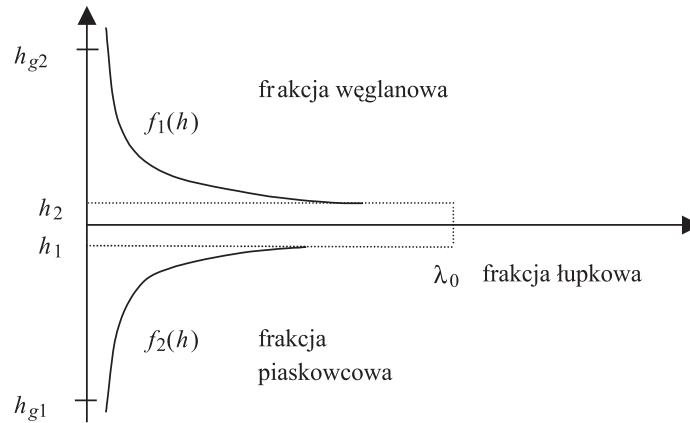
$$\lambda(h) = \begin{cases} f_1(h) & \text{dla frakcji węglanowej} \\ \lambda_0 & \text{dla frakcji łupkowej} \\ f_2(h) & \text{dla frakcji piaskowcowej} \end{cases} \quad (13)$$

$$\lambda = f_i(h) = A_i e^{-B_i h} + C_i \quad (14)$$

$A_i, B_i, C_i$  — parametry zależne od miejsca eksploatacji,  $i = 1, 2$ .

Zakładając, że wysokość furty zmienia się od  $h_{g1}$  do  $h_{g2}$ , średnia zawartość miedzi w urobku wynosi

$$\alpha = \frac{\int_{h_{g1}}^{h_1} f_2(h) dh + \int_{h_1}^{h_2} \lambda_0 dh + \int_{h_2}^{h_{g2}} f_1(h) dh}{h_{g2} - h_{g1}} \quad (15)$$

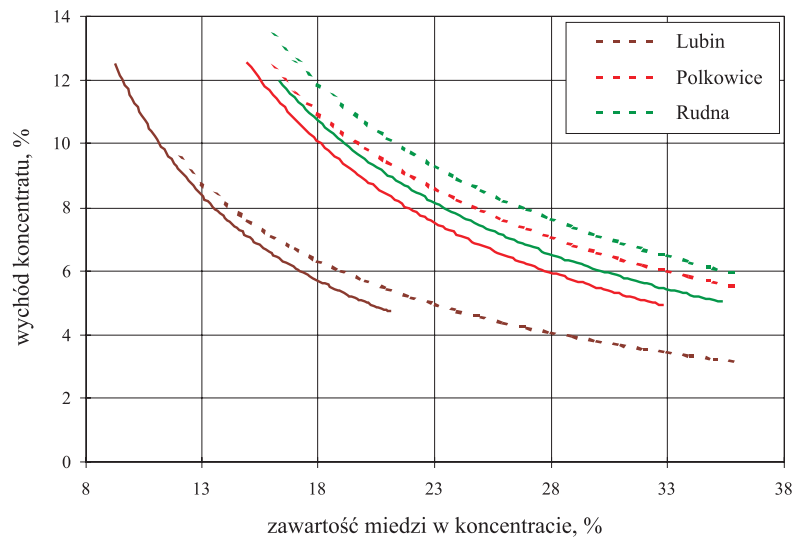


Rys. 5. Krzywe wzbogacania  $\lambda$  dla frakcji litologicznych w furcie eksploatacyjnej

Tak ukształtowane  $\alpha$  jest podstawową charakterystyką urobku. Dla oceny wzbogacalności potrzebne są także analizy mineralogiczne podające udziały poszczególnych minerałów miedzi w warstwach oraz rozkład ich uziarnienia.

O poziomie odzysku decyduje stopień uwolnienia minerałów  $v$ , dzięki czemu teoretyczny uzysk jest określony wzorem

$$\varepsilon_{teor} = \gamma \frac{v\beta_{teor}}{\alpha} \quad (16)$$



Rys. 6. Porównanie hiperbol uzyskanych z modelowania (linie przerywane) z krzywymi uzyskanymi empirycznie (linie ciągłe)



W tej interpretacji współczynnik  $v$  oznacza ułamek (średni w sensie mineralogicznym; są różne stopnie uwolnienia różnych minerałów w różnych frakcjach litologicznych) ilości minerałów zdolnych do wyflotowania w warunkach dyktowanych przez technologię. Wiąże to zagadnienie odzysku metalu ze stopniem rozdrobnienia nadaw, liczbą odczynników i stopni czyszczenia (zawrotów koncentratów) oraz procedurą analiz Della.

Jeżeli badania dotyczące określania wzbogacalności będą prowadzone dla trzech typów litologicznych oddzielnie, możliwe będzie symulowanie przebiegu krzywej wzbogacalności mieszaniny tych warstw za pomocą wyników podstawowych analiz. Wymagało to będzie dodatkowego określania udziału warstw w mieszaninie oraz dokładnej analizy kinetyki ich mielenia i stopni uwolnienia minerałów.

Badania prowadzone na rudzie surowej będącej już mieszaniną warstw mogą pozwolić na uzyskanie pewnej zgodności wyników laboratoryjnych i wyników przemysłowych. Przeprowadzone dotychczas badania [15] pozwoliły na określenie zależności  $\gamma = f(\beta)$  w postaci  $\gamma = a\beta^b$ . Na rysunku 6 przedstawiono porównanie tych krzywych z hiperbolami uzyskanymi z równań teoretycznych.

Istnieje wiele sposobów empirycznego opisu krzywych wzbogacalności. Jednym z nich jest wzór Malewskiego [12]

$$\varepsilon = 1 - \left( \frac{\beta - \alpha}{\beta_{\max} - \alpha} \right)^k \quad (17)$$

gdzie  $\beta_{\max}$  należy rozumieć jako  $v\beta_{\text{teor}}$ .

#### 4. Uwagi końcowe

Aby ocenić jednoznacznie przebieg procesu przerobczego, należy zawsze uwzględnić dwa podstawowe wskaźniki dotyczące ilości produktu oraz jego jakości. Zakłada się także, że charakterystyka nadawy jest znana. Posiadając takie dane można wyznaczyć rachunkowo (analitycznie) wiele potrzebnych zależności oraz charakterystyk. W tym artykule zwrócono uwagę na tę stronę charakterystyki wzbogacalności rud nie wchodząc w istotę zjawisk fizykochemicznych procesu wzbogacania i dotykając zaledwie zagadnień geologiczno-mineralogicznych.

Można powiedzieć, że na jednoznaczność oraz powtarzalność badań wzbogacalności mają wpływ następujące przyczyny:

- zmienny udział poszczególnych warstw litologicznych i ich okruszcowania,
- konieczność uwzględnienia różnych czynników wpływających na przygotowanie rudy do badań,
- trudności w określaniu potrzebnych wielkości do oceny wzbogacalności (np. stopni uwolnienia),
- niejednoznaczność interpretacji i porównań wyników laboratoryjnych i przemysłowych.

Zagadnienia przedstawione w artykule są więc dokumentacją złożoności problemów oraz pewnymi drogami ich rozwiązywania.

## LITERATURA

- [1] *Alexander D.J.; Morrison R.D.*: Rapid estimation of floatability components in industrial flotation plants. *Minerals Engineering*, 11, 2, 1998, 133–143
- [2] *Butra J.*: Metoda doboru systemu eksploatacji złóż rud miedzi w polach o jednorodnej charakterystyce geologicznej. Kraków, Wyd. IGSMIE PAN 2001
- [3] *Crozier R.D.*: Flotation, reagents and ore testing. Oxford, New York, Tokyo, Pergamon Press 1992
- [4] *Dell C.C.*: Release analysis, a new tool for ore dressing research. London, 1953, 75–84
- [5] *Drzymala J.*: Podstawy mineralurgii. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej 2001
- [6] *Drzymala J.*: Evaluation and comparison of separation performance for varying feed composition and scattered separation results. *International Journal of Mineral Processing*, 75, 2005, 189–196
- [7] *Drzymala J., Ahmed H.A.M.*: Mathematical equations for approximation of separation results using the Fuerstenau upgrading curves. *International Journal of Mineral Processing*, 76, 1–2, 2005, 55–65
- [8] *Hall W.B.*: The mathematical form of separation curves based on two parameters and a single liberation coefficient. *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy (sec. C: Mineral Process. Extr. Metall.)*, 80, 1971, C213–C222
- [9] *Jowett A.*: A mathematical form of minerals separation curves. *Trans. IMN SecC*, 78, 1969, C185–C190
- [10] *Laskowski J., Łuszczkiewicz A.*: Przeróbka kopalín. Wzbogacanie surowców mineralnych. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej 1989
- [11] *Madej W.*: Ocena procesów wzbogacania. praca IMN, VII, 3/78, 1978, 105–113
- [12] *Malewski J.*: Modelowanie i symulacja systemów wydobywania i przeróbki skał. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej 1990
- [13] *Rickelton W.A., Dell C.C.*: Grinding requirements of an ore for flotation. *Trans. IMM*, 86, 1977
- [14] *Taggart A.F.*: Handbook of Mineral Dressing. New York, Wiley 1948, 19–200
- [15] *Tumidajski T., Saramak D., Skorupska B.*: Chosen indexes of technological assessment of mineral resources enrichment processes as a function of the concentrate's quality. *Proceedings of XII Balkan Mineral Processing Congress (BMPC 2007)*, Delphi, Greece, 2007, 127–131
- [16] *Tumidajski T., Saramak D.*: Wielowymiarowa analiza wskaźników oceny przebiegu procesów inżynierii mineralnej opartych na prawie zachowania masy. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, 18, 2, 2002, 77–90