

Wojciech Mitkowski\*, Krzysztof Oprzędkiewicz\*

## **Stabilizacja systemu oscylacyjnego nietłumionego o niepewnych parametrach za pomocą sprzężenia zwrotnego z opóźnieniem\*\***

### **1. Uwagi wstępne**

W pracy przedstawiono problem stabilizacji nietłumionego obiektu oscylacyjnego II rzędu o niepewnych parametrach z wykorzystaniem regulatora proporcjonalnego z opóźnieniem. Zagadnienia stabilizacji obiektów oscylacyjnych o znanych parametrach z wykorzystaniem regulatorów z opóźnieniem było omawiane między innymi w pracach: [3–5, 8, 9]. Synteza regulatora proporcjonalnego z opóźnieniem i analiza obszarów stabilności dla rozważanego przypadku została dokładnie omówiona w pracach [1, 9].

W rozważanym przypadku zakładamy, że wartość pulsacji drgań własnych obiektu nie jest dokładnie znana i jest opisana liczbą przedziałową. Taka sytuacja może mieć miejsce w praktyce.

Dodatkowo, w rozważanej sytuacji należy się spodziewać, że niepewność obiektu może mieć wpływ na kształt i wielkość obszarów stabilności na płaszczyźnie parametrów regulatora: wzmocnienia proporcjonalnego oraz opóźnienia.

W pracy zostaną przedstawione następujące zagadnienia:

- Nietłumiony obiekt oscylacyjny II rzędu o niepewnych parametrach.
- Stabilizujące sprzężenie zwrotne z opóźnieniem dla rozważanego obiektu.
- Przykład.

### **2. Nietłumiony obiekt oscylacyjny II rzędu o niepewnych parametrach**

Rozważmy obiekt regulacji opisany następującym równaniem różniczkowym II rzędu:

$$\ddot{x}_1(t) + \omega^2 x_1(t) = \omega^2 u(t) \quad (1)$$

---

\* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

\*\* Praca została zrealizowana w ramach projektu nr N514 414034.

gdzie  $x_1(t), u(t) \in R, t \geq 0$ ,  $\omega$  jest niepewnym parametrem systemu opisanym następującą liczbą przedziałową:

$$\omega = [\underline{\omega}, \overline{\omega}] \quad (2)$$

Parametr  $\omega$  może być interpretowany jako np. pulsacja drgań własnych układu.

Załóżmy, że wyjściem systemu jest zmienna  $y(t) = x_1(t)$ . Wtedy równanie (1) może być zapisane w równoważnej postaci jako następujące równanie stanu:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

W równaniu (3)  $x_1(t)$  oznacza położenie uogólnione, a  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$  oznacza prędkość uogólnioną.

System dynamiczny opisany równościami (1)–(3) jest systemem stabilnym, natomiast nie jest asymptotycznie stabilny, gdyż jego widmo składa się z jednej pary wartości własnych  $\pm j\omega$  zespolonych sprzężonych czysto urojonych.

### 3. Stabilizujące sprzężenie zwrotne z opóźnieniem dla rozważanego obiektu

Dla obiektu opisanego przez (1)–(3) rozważmy następujące ujemne sprzężenie zwrotne z opóźnieniem:

$$u(t) = -Ky(t-h) = -Kx_1(t-h) \quad (4)$$

gdzie  $h > 0$  oznacza opóźnienie toru pomiarowego. Zauważmy, że wartość opóźnienia  $h$  może być w niektórych sytuacjach traktowana jako zmienna sterująca w układzie. W takiej sytuacji dopuszczalna wartość  $h$  musi się zawierać w przedziale:  $[h_{\min}; h_{\max}]$ , przy czym  $h_{\min}$  jest zdeterminowane przez techniczną realizację układu sterowania (jest to opóźnienie wnoszone przez tor pomiarowy, które nie może być mniejsze od wartości progowej), a  $h_{\max}$  jest zdeterminowane przez stabilność układu regulacji. Jednocześnie należy zauważyć, że od strony realizacji technicznej nie ma problemu z użyciem  $h$  jako zmiennej sterującej. Współczynnik  $K$  jest wzmocnieniem regulatora (4).

Po uwzględnieniu (3) i (4) zamknięty układ sterowania dla rozważanego obiektu można opisać następująco:

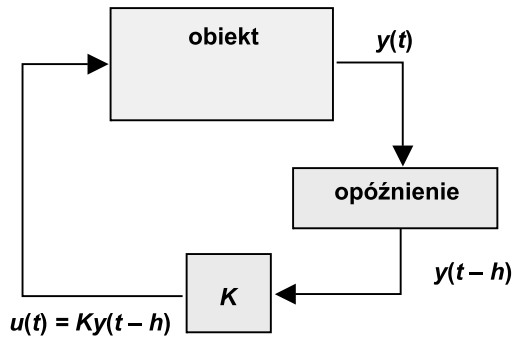
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$y(t) = [1 \quad 0]$$

lub z równości (1), (4)

$$\ddot{x}_1(t) + \omega^2 x_1(t) + \omega^2 K x_1(t-h) = 0, \quad y(t) = x_1(t) \quad (5a)$$

Schemat blokowy zamkniętego układu sterowania (1), (4) lub (3), (4) opisanego przez równanie (5a) lub (5) pokazany jest na rysunku 1.

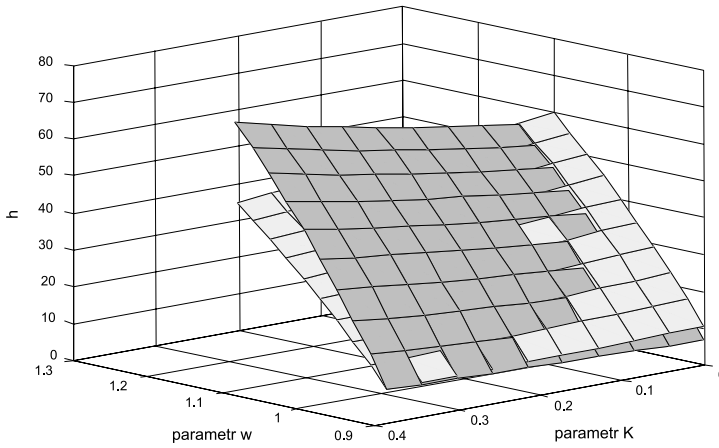


Rys. 1. Stabilizujące ujemne sprzężenie zwrotne z opóźnieniem dla obiektu oscylacyjnego

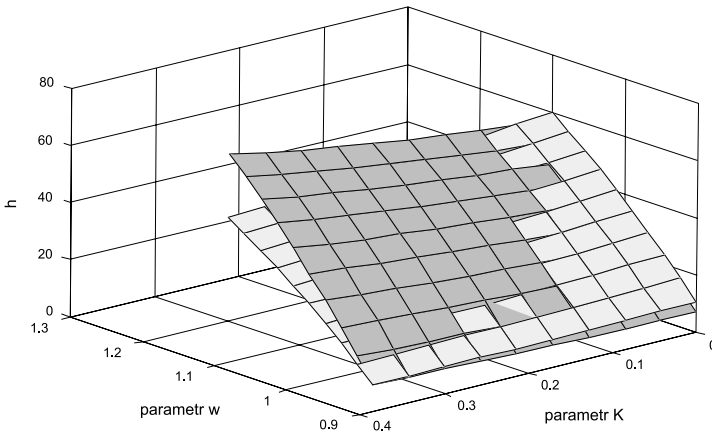
W literaturze (zob. np. [8]) jest udowodnione, że sprzężenie zwrotne (4) stabilizuje asymptotycznie rozważany układ oscylacyjny, przy czym istotnym zagadnieniem jest określenie obszarów stabilności rozważanego układu regulacji na płaszczyźnie parametrów systemu:  $K$ ,  $h$  oraz  $\omega$ . Zależność pomiędzy tymi parametrami może być opisana następująco [1]:

$$0 < K < \frac{1+4n}{1+4n+8n^2} \quad \text{i} \quad \frac{2n\pi}{\omega\sqrt{1-K}} < h < \frac{(2n+1)\pi}{\omega\sqrt{1+K}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Na podstawie (6) jest możliwe numeryczne wyznaczenie obszarów stabilności w przestrzeni parametrów:  $h$ ,  $K$  oraz  $\omega$ . Przykładowe obszary stabilności w przestrzeni  $\mathbf{R}^3$  dla:  $\omega = [0,9; 1,1]$   $n = 1, 2$  oraz  $K$  wyznaczonego na podstawie (6) są pokazane na rysunkach 2 i 3. Obszary te są zawarte pomiędzy powierzchniami granicznymi.



**Rys. 2.** Obszar stabilności w przestrzeni parametrów  $h$ ,  $K$  oraz  $\omega$  dla  $n = 1$



**Rys. 3.** Obszar stabilności w przestrzeni parametrów  $h$ ,  $K$  oraz  $\omega$  dla  $n = 2$

W warunkach niepewności parametrów obiektu, opisanej przez  $\omega$  istotne jest wyznaczenie takiego obszaru wartości parametrów  $K$  oraz  $h$ , w którym układ będzie odpornie stabilny, tzn. będzie stabilny dla dowolnej wartości  $\omega$  z zadanego przedziału niepewności.

Zauważmy, że obszary te mogą być wyznaczone na podstawie (6) przy założeniu, że obszar stabilności dla dowolnej wartości niepewnego parametru  $\omega$ , jest częścią wspólną obszarów stabilności dla obu skrajnych wartości  $\omega$ . Można to zapisać następująco:

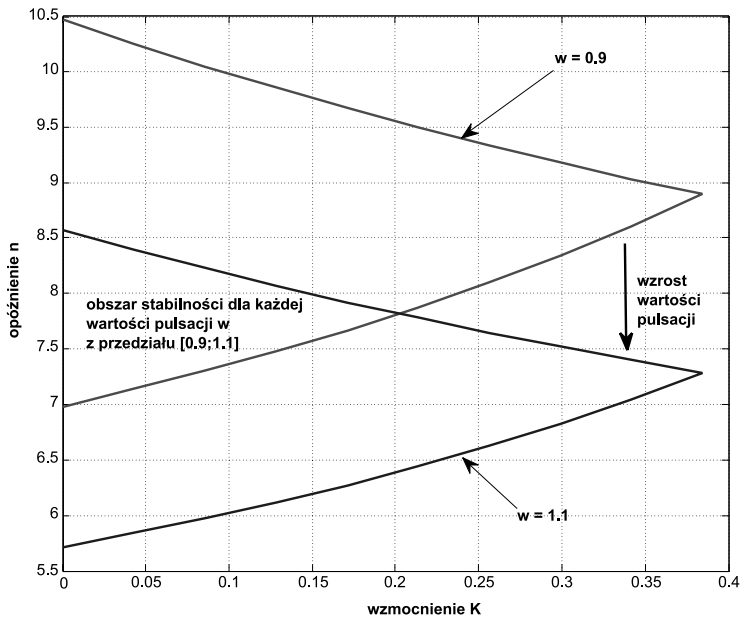
$$0 < K < \frac{1+4n}{1+4n+8n^2} \quad \text{i} \quad \frac{2n\pi}{\omega\sqrt{1-K}} < h_r < \frac{(2n+1)\pi}{\omega\sqrt{1+K}} \quad (7)$$

W nierównościach (7) parametr  $h_r$  oznacza wartości opóźnienia gwarantujące stabilność układu dla każdej wartości niepewnego parametru  $\omega = [\underline{\omega}; \bar{\omega}]$ .

Na podstawie nierówności (7) można zauważyć, że rozszerzenie obszaru niepewności parametru  $\omega$  powoduje zmniejszenie się obszaru wartości parametrów  $K$  oraz  $h$  gwarantujących odporną stabilność układu dla dowolnej wartości pulsacji  $\omega$  z zadanego przedziału. Zbyt duża niepewność  $\omega$  może spowodować utratę własności odpornej stabilności układu.

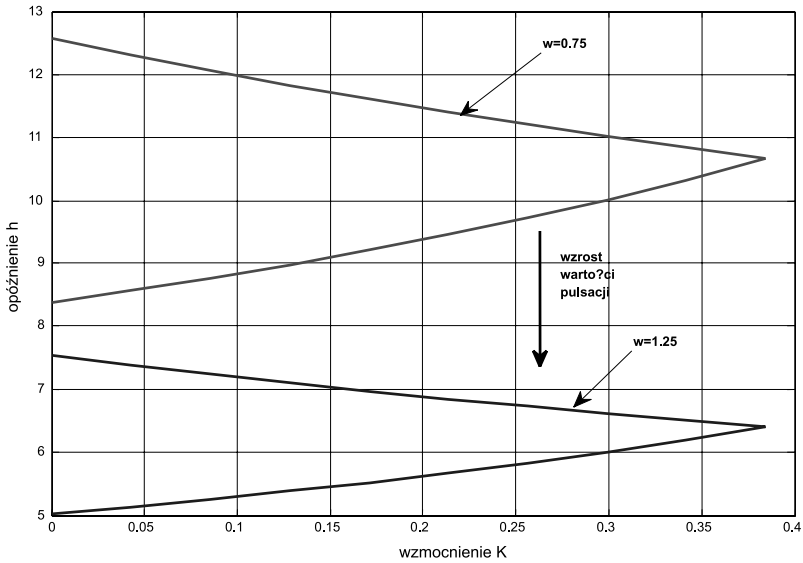
#### 4. Przykład

Rozważmy obiekt o niepewnych parametrach, opisany przez równania (1)–(3), dla którego  $\omega = [0,9; 1,1]$ . Przykładowy obszar stabilności dla  $n = 1$  oraz rozważanej niepewnej pulsacji własnej pokazany jest na rysunku 4.

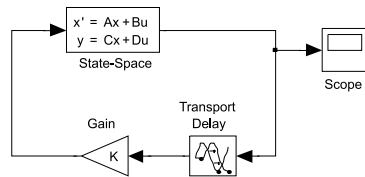


Rys. 4. Obszar odpornej stabilności dla dowolnej wartości pulsacji  $\omega \in [0,9; 1,1]$  oraz  $n = 1$

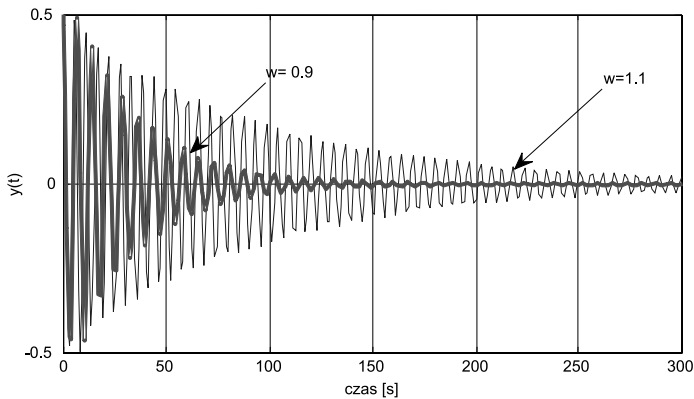
Z kolei rozważmy zwiększenie niepewności obiektu, co można opisać rozszerzeniem zakresu wartości pulsacji własnej:  $\omega = [0,75; 1,25]$ . Sytuacja ta pokazana jest na rysunku 5. W tym wypadku nastąpiła utrata odpornej stabilności rozważanego systemu sterowania, tzn. nie istnieje taki zakres wartości  $K$  oraz  $h$ , dla których system będzie stabilny dla dowolnej wartości parametru  $\omega$  z rozważanego zakresu.



**Rys. 5.** Dla dowolnej wartości pulsacji  $\omega \in [0,9; 1,1]$  oraz  $n = 1$  obszar odpornej stabilności jest zbiorem pustym



**Rys. 6.** Model SIMULINK-owy układu stabilizacji



**Rys. 7.** Przykładowy przebieg czasowy wyjścia systemu dla dwóch wartości niepewnej pulsacji własnej obiektu

Układ stabilizacji pokazany na rysunku 1 został także zamodelowany w środowisku MATLAB/SIMULINK. Model SIMULINK-owy pokazany jest na rysunku 6. Przykładowy przebieg wyjścia układu  $y(t)$  dla stanu w przedziale  $[-h, 0)$  równego zero i warunków początkowych:  $x(0) = 0,5$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  oraz wartości niepewnej pulsacji obiektu:  $\omega = 0,9$ ,  $\omega = 1,1$  i parametrów regulatora:  $K = 0,1$  i  $h = 8$  [s] pokazany jest na rysunku 7.

Na podstawie rysunku 7 można stwierdzić, że proponowany regulator odporny stabilizuje rozważany system dla rozważanych wartości niepewnej pulsacji własnej obiektu.

## 5. Uwagi końcowe

Uwagi końcowe do pracy mogą być sformułowane następująco:

- Rozważany system oscylacyjny o niepewnych parametrach może być stabilizowany z wykorzystaniem regulatora z opóźnieniem, przy czym jest także możliwe wyznaczenie obszarów odpornej stabilności na płaszczyźnie parametrów regulatora.
- Zwiększenie niepewności obiektu powoduje zmniejszenie obszarów odpornej stabilności na płaszczyźnie parametrów regulatora. Zbyt duża niepewność obiektu może spowodować także całkowitą utratę własności odpornej stabilności układu.

## Literatura

- [1] Abdallah C., Dorato P., Benitez-Read J., Byrne R. (1993), *Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems*. Proc. American Contr. Conf., San Francisco, 3106.
- [2] Busłowicz M., *Zastosowania analizy przedziałowej w teorii obwodów elektrycznych*. XXVII IC-SPETO-2004, Gliwice-Niedzica, 26–29.05.2004, t. 1, 3, 3a–3h, 4.
- [3] Busłowicz M., *Stabilizacja układu drabinkowego typu LC za pomocą dodatniego sprzężenia zwrotnego z opóźnieniem od wyjścia*. XXVII IC-SPETO-2004, Gliwice-Niedzica, 26–29.05.2004, t. 2, 265–268.
- [4] Chrapała A., *Regulatory z opóźnieniem dla układów oscylacyjnych*. Praca magisterska (opiekun W. Mitkowski), KA EAIiE-AGH, Kraków 2005, 1–86.
- [5] Mitkowski W., *Dynamic Feedback in LC Ladder Network (Dynamiczne sprzężenie zwrotne w układzie drabinkowym typu LC)*. Bul. Pol. Ac. Sci., Tech. Sci., vol. 51, No. 2, 2003, 173–180.
- [6] Mitkowski W., *First range dynamic feedback for LC ladder network (Dynamiczne sprzężenie zwrotne rzędu pierwszego dla układu drabinkowego typu L i C)*. XXVII IC-SPETO-2004, Gliwice-Niedzica, 26–29.05.2004, t. 2, 197–200.
- [7] Mitkowski W., *Stabilisation of LC ladder network*. Bul. Pol. Ac. Sci., Tech. Sci., vol. 52, No. 2, 2004, 109–114.
- [8] Mitkowski W., *Analysis of undamped second order systems with dynamic feedback*. Control and Cybernetics, vol. 33, No. 4, 2004, 563–572.
- [9] Niculescu S.-I., Abdallah C.T., *Delay effects on static output feedback stabilization*. Proc. IEEE CDC, Sydney, 2000, 2811–2816.