

Piotr Bania\*

## Estymacja stanu w układach liniowych przy skwantowanych pomiarach wyjść

### 1. Wstęp

Zastosowanie w układach sterowania cyfrowych systemów pomiarowych (przetworniki A/D, enkodery, liczniki itp.) oraz dyskretna reprezentacja liczb w sterownikach i komputerach prowadzi do utraty informacji o obserwowanym obiekcie. Informacja jest tracona w procesie kwantyzacji oraz na skutek procesu próbkowania. Jeżeli amplituda sygnału wyjściowego jest porównywalna z przedziałem kwantyzacji oraz intensywność zakłóceń na wyjściu jest mała w stosunku do przedziału kwantyzacji, to błędy kwantyzacji nie mogą być pominięte. Obserwowany układ jest wtedy nieliniowy, a równanie obserwacji jest nieciągłe względem stanu i zakłóceń. Filtr Kalmana-Bucy (skrót KB) zastosowany do takiego układu generuje obciążoną estymatę stanu. Pierwsze przybliżone wyniki dotyczące estymacji stanu przy skwantowanych pomiarach wyjść w układach z czasem dyskretnym podali Meier *et al.*, 1968, Curry 1970, Clements i Haddad 1972. Z nowszych prac należy wymienić artykuł Sura i Padena (1998) oraz pracę Sviestinsa i Wigrena (2000), której autorzy podają bardzo skomplikowany algorytm estymacji oparty na rozwiązaniu równania Fokkera-Plancka-Kołmogorowa, jednakże w zadaniach wielowymiarowych, algorytm ten wykazuje eksplozję kombinatoryczną.

Podstawowa idea niniejszej pracy jest następująca: korzystając z teorii Onsagera-Mah-lupa (Onsager i Mahlup 1959, Takahashi i Vatanabe 1981, Dürr i Bach 1978) oraz z teorii filtru największej wiarygodności (Hijab 1979, Mortensen 1968, Baras *et al.* 1988) można skonstruować funkcjonal (zależny od pomiarów oraz estymowanych zakłóceń i stanu), którego minimalizacja pozwala otrzymać estymatę stanu (por. Todorov 2008, 2010). Następnie, korzystając z warunków optymalności, wprowadza się równania estymatora.

Praca jest zorganizowana następująco: w części drugiej sformułowano zadanie estymacji oraz wyprowadzono równania estymatora, w części trzeciej pokazano przykłady działania estymatora i porównano jego działanie z działaniem filtru KB. Jeżeli amplituda sygnału wyjściowego oraz intensywność zakłóceń na wyjściu jest duża w stosunku do przedziału

---

\* AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki, Katedra Automatyki, al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków. E-mail: pba@agh.edu.pl

kwantyzacji, to błędy obu estymatorów są porównywalne i efekty kwantyzacji można pominąć. Przeprowadzone symulacje pokazują, że w zadaniach, w których efekty kwantyzacji są istotne, błąd estymacji stanu jest nawet kilkadziesiąt razy mniejszy niż błąd filtru KB. Artykuł kończy się wnioskami i spisem literatury.

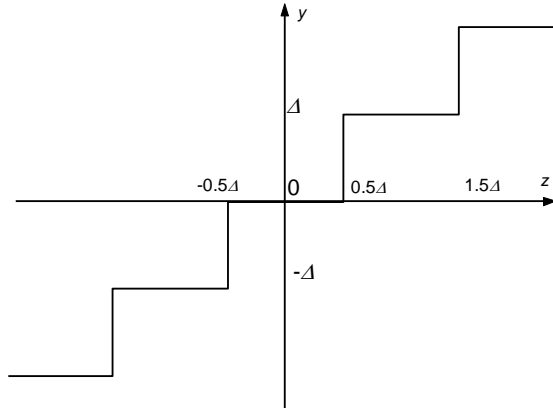
## 2. Estymacja stanu przy skwantowanych pomiarach wyjść

Niech obiekt będzie opisany układem równań

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L\tilde{w}, \quad \tilde{z} = C\tilde{x} + \tilde{v}, \quad \tilde{y} = Q(\tilde{z}, \Delta), \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \quad t \geq 0, \quad \Delta > 0, \quad (1)$$

$$\tilde{x}(t) \in R^n, u(t) \in R^r, \tilde{w}(t) \in R^m, \tilde{y}(t) \in \{0, \pm\Delta, \pm 2\Delta, \dots\}.$$

Macierze  $A$ ,  $B$ ,  $L$ ,  $C$  mają wymiary odpowiednio  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $n \times m$  i  $1 \times n$ . Funkcje  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{v}$  nazywamy zakłóceniami. Będziemy zakładać, że  $\tilde{w}$  jest białym szumem Gaussa o macierzy kowariancji  $R = R^T > 0$ , oraz że zmienna losowa  $\tilde{v}(t)$  ma dla każdego  $t \geq 0$  rozkład normalny  $N(0, \sigma_2)$ ,  $\sigma > 0$ . Warunek początkowy  $\tilde{x}_0$  ma rozkład Gaussa  $N(x_a, P)$ , z macierzą kowariancji  $P = P^T > 0$  i średnią  $x_a$ . Prawostronnie ciągła funkcja  $Q$ , której wykres pokazano na rysunku 1, jest charakterystyką kwantyzatora.



Rys. 1. Charakterystyka kwantyzatora

Zmienna losowa  $\tilde{z}(t)$  ma rozkład  $N(C\tilde{x}(t), \sigma_2)$ . Niech  $k$  będzie liczbą całkowitą. Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa  $\tilde{y}(t)$  przyjmie wartość  $k\Delta$ , pod warunkiem że system (1) jest w stanie  $\tilde{x}(t)$ , wynosi

$$p(\tilde{y}(t) = k\Delta | \tilde{x}(t)) = \phi\left(\frac{\tilde{y}(t) - C\tilde{x}(t) + 0.5\Delta}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\tilde{y}(t) - C\tilde{x}(t) - 0.5\Delta}{\sigma}\right) \quad (2)$$

gdzie

$$q(\xi, \alpha) = -\ln \left( \frac{\phi(\xi + \alpha) - \phi(\xi - \alpha)}{2\phi(\alpha) - 1} \right) \quad (3)$$

Dla dalszych rachunków wygodnie jest rozważyć funkcję  $q : R \times R^+ \rightarrow R_0^+$

$$\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi \quad (4)$$

Funkcja  $q$  jest parzysta, oraz

$$\begin{aligned} q(\xi) &> 0, \xi \neq 0, q(0) = 0, q'(0) = 0, q'(-\xi) = -q'(\xi), \\ q''(\xi) &> 0, q''(-\xi) = q''(\xi) \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie, dla prostoty zapisu pominięto drugi argument pisząc  $q(\xi)$  zamiast  $q(\xi, \alpha)$ .

Zakładamy dalej, że model obiektu jest opisany układem równań różniczkowych

$$\dot{x}(\tau) = Ax(\tau) + Bu(\tau) + Lw(\tau), y(\tau) = Cx(\tau), \tau \in [0, t], x(0) = \eta. \quad (6)$$

Równanie (6) ma ustalony warunek końcowy i jest rozwiązywane wstecz w czasie. Na podstawie teorii Onsagera-Mahlua (Onsager i Mahlup 1953, Takahashi i Vatanabe 1981, Dürr i Bach 1978) oraz teorii filtru największej wiarygodności (Hijab 1979, Mortensen 1968, Baras et al. 1988, por. też Todorov 2008, 2010) można postawić hipotezę, że minimalizacja funkcjonału

$$J(t, \eta, w) = \frac{1}{2} |x(0) - x_a|_{p-1}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t q(\sigma^{-1}(\tilde{y}(\tau) - Cx(\tau)), 0.5\Delta\sigma^{-1}) + |w(\tau)|_{R-1}^2 d\tau, \quad (7)$$

stanowi dobry punkt wyjścia do konstrukcji estymatora stanu systemu (1). Aby się o tym przekonać, będziemy poszukiwać minimum funkcjonału (7) na trajektoriach systemu (6)

$$\min_{\eta \in R^n, w \in L^2(0, t; R^m)} J(t, \eta, w).$$

Estymatę stanu oznaczamy symbolem  $\hat{x}(t)$ . Definiujemy funkcję optymalnej jakości

$$V(t, \eta) = \min_{w \in L^2(0, t; R^m)} J(t, \eta, w). \quad (8)$$

Łatwo zauważyć, że estymata stanu minimalizuje funkcję jakości optymalnej

$$\hat{x}(t) = \arg \min_{\eta \in R^n} V(t, \eta). \quad (9)$$

A zatem, jeżeli funkcja  $V$  jest różniczkowalna, to jej pochodne znikają w punkcie

$$\nabla V(t, \hat{x}(t)) = 0, t \geq 0. \quad (10)$$

Z teorii sterowania optymalnego (zob. Bellman 1957, Mortensen 1968) wynika, że funkcja jakości optymalnej spełnia równanie Hamiltona-Jacobiego

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\nabla V^T (A\eta + Bu) - \frac{1}{2} \nabla V^T LRL^T \nabla V + q(\sigma^{-1}(\tilde{y} - C\eta), 0.5\Delta\sigma^{-1}), \quad (11)$$

$$V(0, \eta) = \frac{1}{2} |\eta - x_a|_{P^{-1}}^2.$$

Zakładamy, że funkcja  $V$  jest dwukrotnie różniczkowalna względem  $\eta$  oraz przyjmujemy oznaczenie  $K(t) = \nabla^2 V(t, \hat{x}(t))$ . W otoczeniu punktu  $\hat{x}(t)$  przyrosty funkcji  $V$  mogą być aproksymowane formą kwadratową

$$V(t, \eta) - V(t, \hat{x}(t)) = \frac{1}{2} (\eta - \hat{x})^T K(t) (\eta - \hat{x}) + o(|\eta - \hat{x}|).$$

Korzystając z (10) i (11) można (zob. Baras *et al.* 1988), poprzez bezpośrednie różniczkowanie równania (11) pokazać, że macierz  $K$  spełnia równanie Riccatiego

$$\dot{K} = -A^T K - KA - KLRL^T K + \sigma^{-2} q''(\sigma^{-1}(\tilde{y} - C\hat{x}), 0.5\Delta\sigma^{-1}) C^T C, K(0) = P^{-1}.$$

Macierz odwrotną do  $K$  oznaczamy symbolem  $S$ . Jeżeli  $K(t) > 0$ , dla  $t > 0$ , to macierz  $S$  spełnia równanie Riccatiego

$$\dot{S} = AS + SA^T + LRL^T - \sigma^{-2} q''(\sigma^{-1}(\tilde{y} - C\hat{x}), 0.5\Delta\sigma^{-1}) SC^T CS, S(0) = P. \quad (12)$$

Wyprowadzimy teraz równanie różniczkowe jakie spełnia estymata stanu  $\hat{x}(t)$ . Jeżeli funkcja  $V$  jest odpowiednio gładka, to z równania (10) mamy

$$\frac{d}{dt} \nabla V(t, \hat{x}(t)) = \nabla \frac{\partial}{\partial t} V(t, \hat{x}(t)) + \nabla^2 V(t, \hat{x}(t)) \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = 0, \quad (13)$$

dla prawie wszystkich  $t \in R_0^+$ .

Korzystając z równania Hamiltona-Jacobiego (11) oraz z (10), dostajemy

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial V(t, \hat{x}(t))}{\partial t} &= \nabla (-\nabla V(t, \hat{x}(t)))^T (A\hat{x}(t) + Bu(t)) - 0.5 \nabla V(t, \hat{x}(t))^T LRL^T \nabla V(t, \hat{x}(t)) + \\ &\quad + q(\sigma^{-1}(\tilde{y}(t) - C\hat{x}(t)), 0.5\Delta\sigma^{-1}) = \\ &= -\nabla^2 V(t, \hat{x}(t)) (A\hat{x}(t) + Bu(t)) - C^T \sigma^{-1} q'(\sigma^{-1}(\tilde{y}(t) - C\hat{x}(t)), 0.5\Delta\sigma^{-1}). \end{aligned}$$

Stąd oraz z (13)

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(t, \hat{x}(t)) \frac{d\hat{x}(t)}{dt} - \nabla^2 V(t, \hat{x}(t))(A\hat{x}(t) + Bu(t)) - \\ - C^T \sigma^{-1} q'(\sigma^{-1}(\tilde{y}(t) - C\hat{x}(t)), 0.5\Delta\sigma^{-1}) = 0. \end{aligned}$$

Pamiętając, że  $K(t) = \nabla^2 V(t, \hat{x}(t))$ ,  $S(t) = K(t)^{-1}$ , otrzymujemy równania estymatora

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + SC^T \sigma^{-1} q'(\sigma^{-1}(\tilde{y} - C\hat{x}), 0.5\Delta\sigma^{-1}), \hat{x}(0) = x_a \quad (14)$$

$$\dot{S} = AS + SA^T + LRL^T - \sigma^{-2} q''(\sigma^{-1}(\tilde{y} - C\hat{x}), 0.5\Delta\sigma^{-1}) SC^T CS, S(0) = P. \quad (15)$$

Równania (14), (15) są podobne do równań opisujących filtr KB. W przypadku granicznym, gdy  $\Delta \rightarrow 0$  mamy

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} q(\sigma^{-1}(Cx - \tilde{y}), 0.5\Delta\sigma^{-1}) &= 0.5\sigma^{-2}(Cx - \tilde{y})^2, \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} q'(\sigma^{-1}(Cx - \tilde{y}), 0.5\Delta\sigma^{-1}) &= \sigma^{-2}(Cx - \tilde{y}), \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} q''(\sigma^{-1}(Cx - \tilde{y}), 0.5\Delta\sigma^{-1}) &= \sigma^{-2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Zatem dla małych przedziałów kwantyzacji, równania (14) i (15) przechodzą w równania filtru KB.

**Wylizanie funkcji  $q$  i jej pochodnych.** Wylizyśmy pierwsze i drugie pochodne funkcji  $q$  oraz podamy wzory asymptotyczne, umożliwiające efektywne obliczanie funkcji  $q$  i jej pochodnych dla dużych wartości argumentu  $\xi$ . Poprzez dwukrotne różniczkowanie równości  $\psi = e^{-q}$ , otrzymujemy

$$q' = -\psi' e^q, \quad q'' = (q')^2 - \psi'' e^q, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(x+\alpha)^2} - e^{-\frac{1}{2}(x-\alpha)^2}}{\sqrt{2\pi M}}, \quad \psi'' = -\frac{(x+\alpha)e^{-\frac{1}{2}(x+\alpha)^2} - (x-\alpha)e^{-\frac{1}{2}(x-\alpha)^2}}{\sqrt{2\pi M}}, \\ M &= 2\phi(\alpha) - 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Powyższe wzory można stosować, gdy  $|\xi| \leq \alpha + 6$ . Dla  $|\xi| > \alpha + 6$ , wylizanie wartości funkcji  $q$  i jej pochodnych wymaga obliczenia logarytmu bardzo małych liczb. Dla  $|\xi| > \alpha + 8$  pakiet MATLAB zgłasza komunikat *error: log of zero*. Aby ominąć ten problem, przy wylizaniu funkcji  $q$  i jej pochodnych można stosować następujące wzory asymptotyczne.

$$q(\xi) \approx \frac{1}{2}(\xi - \alpha)^2 + \ln(\xi - \alpha) - \ln R(\xi, \alpha) + \ln(\sqrt{2\pi M}), \quad (19)$$

$$q'(\xi) \approx (\xi - \alpha) \frac{1 - e^{-2\alpha\xi}}{d(\xi, \alpha)}, \quad (20)$$

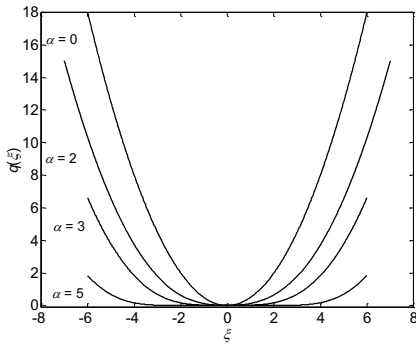
$$q''(\xi) \approx \frac{c(\xi - \alpha) + (\xi - \alpha)^2 e^{-2\alpha\xi} \left( \frac{(\xi - \alpha)b(\xi + \alpha)}{\xi + \alpha} + e^{-2\alpha\xi} - 2 \right)}{d(\xi, \alpha)^2} + \frac{(\xi^2 - \alpha^2)e^{-2\alpha\xi}}{d(\xi, \alpha)}, \tag{21}$$

$$d(\xi, \alpha) = b(\xi - \alpha) - \frac{(\xi - \alpha)b(\xi + \alpha)}{\xi + \alpha} e^{-2\alpha\xi},$$

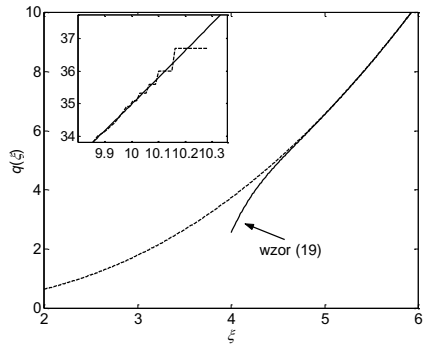
$$b(z) = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^4} - \frac{15}{z^6} + \dots + \frac{(-1)^N 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2N - 1)}{z^{2N}},$$

$$c(z) = 1 - \frac{3}{z^2} + \frac{15}{z^4} \dots + \frac{(-1)^{N+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2N - 1)}{z^{2N-2}}, \xi > \alpha > 0.$$

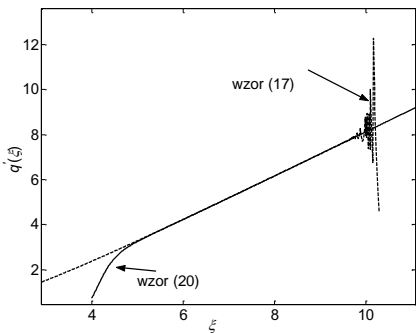
a)



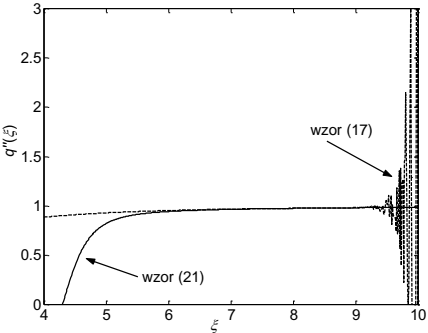
b)



c)



d)



**Rys. 2.** Funkcja  $q$  dla różnych wartości  $\alpha$  (a). Funkcja  $q$  i jej przybliżenie asymptotyczne dla  $\alpha = 2, N = 6$  (b). Pochodne funkcji  $q$  i ich przybliżenie asymptotyczne (c, d). Obliczenia wykonano w programie Matlab. Na rysunkach b, c, d) widoczne narastanie błędów numerycznych

Powyższe wzory można wyprowadzić, korzystając z rozwinięcia

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi \approx \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} b(x)}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x > 0,$$

podanego w pracy (Abramovitz i Stegun 1970, s. 932, wzór 26.2.12). Wyrażenie (19) nie zawiera logarytmu małych liczb. Ze wzoru (19) wynika, że dla dużych wartości  $\xi$ , funkcja  $q$  jest w przybliżeniu kwadratowa. Dla  $\xi < 0$  korzystamy z własności  $q(-\xi) = q(\xi)$ ,  $q'(-\xi) = -q'(\xi)$ ,  $q''(-\xi) = q''(\xi)$ . Wystarczającą dokładność przybliżenia uzyskuje się dla  $N \geq 2$ ,  $|\xi| > \alpha + 6$ .

### 3. Przykłady

Działanie filtru (14), (15) porównamy z działaniem filtru Kalmana-Bucy'ego. Średni błąd estymacji za pomocą estymatora (14), (15) i średni błąd filtru KB definiujemy odpowiednio, jako

$$E_Q = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |\hat{x}(t) - x(t)|^2 dt}, \quad E_{KB} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |\hat{x}_{KB}(t) - x(t)|^2 dt} \quad (22)$$

gdzie przez  $\hat{x}_{KB}$  oznaczyliśmy estymatę stanu uzyskaną za pomocą filtru KB z tymi samymi warunkami początkowymi co filtr (14), (15) i obiekt. Do przeprowadzenia symulacji będziemy używać stochastycznej metody Rungego-Kutty. Równaniu (1) odpowiada stochastyczne równanie różniczkowe

$$dx = (Ax + Bu)dt + Ldw \quad (23)$$

Rozwiązanie tego równania można przybliżać za pomocą następującego schematu różnicowego.

Dane:

- $x_0$  – wektor losowy o znanym rozkładzie,
- $\Delta t > 0$  – okres dyskretyzacji czasu,
- $k_{max}$  – maksymalna liczba kroków czasowych.

Dla  $k = 0, 1, 2, \dots, k_{max}$

1) Wygeneruj wektor losowy  $\Delta w_k(0, R\Delta t)$

2) Oblicz

$$K_1 = \hat{f}(t_k, x_k, \Delta w_k, \Delta t)\Delta t,$$

$$K_2 = \hat{f}(t_k + 0.5\Delta t, x_k + 0.5K_1, \Delta w_k, \Delta t)\Delta t,$$

$$\begin{aligned} K_3 &= \hat{f}(t_k + 0.5\Delta t, x_k + 0.5K_2, \Delta w_k, \Delta t)\Delta t, \\ K_4 &= \hat{f}(t_k + \Delta t, x_k + K_3, \Delta w_k, \Delta t)\Delta t, \\ x_{k+1} &= x_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{aligned}$$

3) Podstaw  $k \rightarrow k + 1$  i idź do 1,

przy czym

$$\hat{f}(t, x, \Delta w, \Delta t) = (Ax(t) + Bu(t)) + L\Delta w / \Delta t.$$

Schemat ten jest zbieżny do procesu stochastycznego będącego rozwiązaniem równania (23), a rząd zbieżności wynosi 2 (zob. np. Wilkie 2004, Sobczyk 1993 s. 343). Schematy stochastyczne wyższego rzędu można konstruować w analogiczny sposób na bazie schematów deterministycznych. Rząd zbieżności schematu stochastycznego jest o połowę mniejszy niż rząd odpowiedniego schematu deterministycznego.

**Przykład 3.1.** Rozważamy system

$$\dot{\tilde{x}} = -\tilde{x} + u + \tilde{w}, \tilde{y} = Q(\tilde{x} + \tilde{v}, \Delta), u = 4.5 \sin(t), \tilde{x}_0(x_a, P)$$

przy czym

$$R = 0.0025, \sigma = 0.01, \Delta = 3, x_a = 1, P = 0.01.$$

Korzystając z (14) i (15) mamy następujące równania filtru

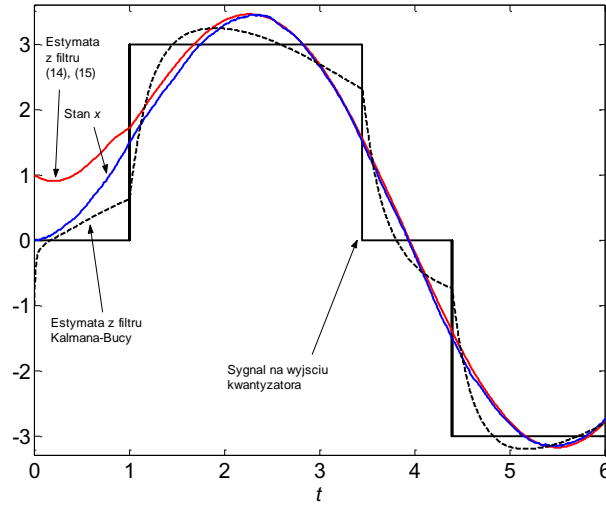
$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= -\hat{x} + u + sq'(\tilde{y} - \hat{x}, 150), \hat{x}(0) = 1, \\ \dot{s} &= -2s + 0.0025 - 10^4 q''(\hat{x} - \tilde{y}, 150)s^2, s(0) = 0.01. \end{aligned}$$

W symulacjach przyjęto okres dyskretyzacji czasu  $\Delta t = 0.003$ . Na rysunkach 3 i 4 porównano działanie filtru (14), (15) z działaniem filtru KB. Średnie błędy estymacji oszacowane na podstawie długookresowych symulacji zestawiono w tabeli 1.

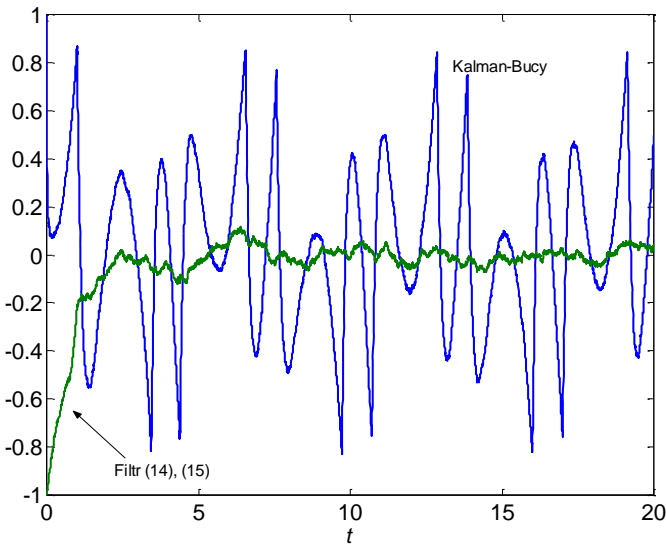
**Tabela 1**  
Średnie błędy estymacji

$\sigma$	$E_{KB}$	$E_Q$	$E_{KB}/E_Q$
0.01	0.341	0.0334	10.2
0.05	0.0600	0.0371	1.62
1.0	0.0314	0.0314	0.999





Rys. 3. Porównanie działania filtru (14), (15) z działaniem filtru Kalmana-Bucy'ego



Rys. 4. Błąd estymacji stanu filtrem (14), (15) i filtrem Kalmana-Bucy'ego

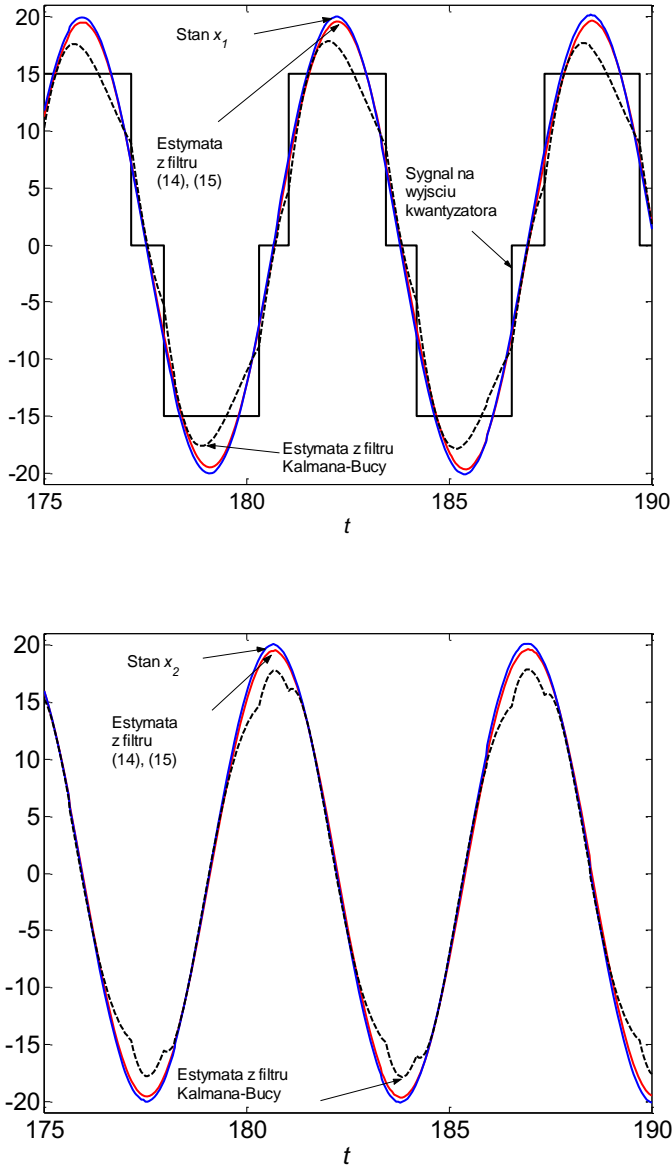
**Przykład 3.2.** Rozważamy oscylator harmoniczny opisany równaniami

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2, \dot{\tilde{x}}_2 = -\tilde{x}_1 + \tilde{w}, \tilde{y} = Q(\tilde{x}_1 + \tilde{v}, \Delta),$$

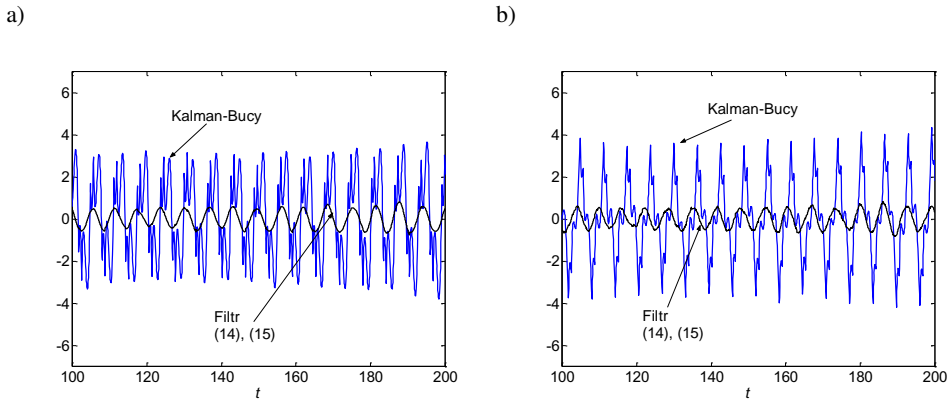
przy czym

$$R = 0.0064, \sigma = 0.0025, \Delta = 15, x_a = [20, 0]^T, P = \text{diag}([0.1, 0.05]).$$

W symulacjach przyjęto okres dyskretyzacji czasu  $\Delta t = 0.05$ . Na rysunkach 5 i 6 porównano działanie filtru (14), (15) z działaniem filtru KB. Na podstawie długookresowej symulacji oszacowano  $E_{KB} = 1.87$ ,  $E_Q = 0.38$ , a zatem średni błąd filtru (14), (15) jest około pięć razy mniejszy niż błąd filtru KB.



Rys. 5. Porównanie działania filtru (14), (15) z działaniem filtru Kalmana-Bucy'ego



**Rys. 6.** Błąd estymacji pierwszej (po lewej) i drugiej (z prawej) składowej stanu filtrem (14), (15) i filtrem Kalmana-Bucy'ego

**Przykład 3.3.** Rozważmy zadanie estymacji położenia i prędkości kątowej silnika prądu stałego za pomocą enkodera o małej rozdzielczości. Załóżmy, że na wale silnika umieszczony jest enkoder generujący 32 impulsy na jeden obrót wału. Zatem przedział kwantyzacji wynosi  $11.25^\circ$ . Równania systemu są następujące

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2, \dot{\hat{x}}_2 = -0.25\hat{x}_2 + 0.25(u + \tilde{w}), \hat{y} = Q(\hat{x}_1 + \tilde{v}, \Delta),$$

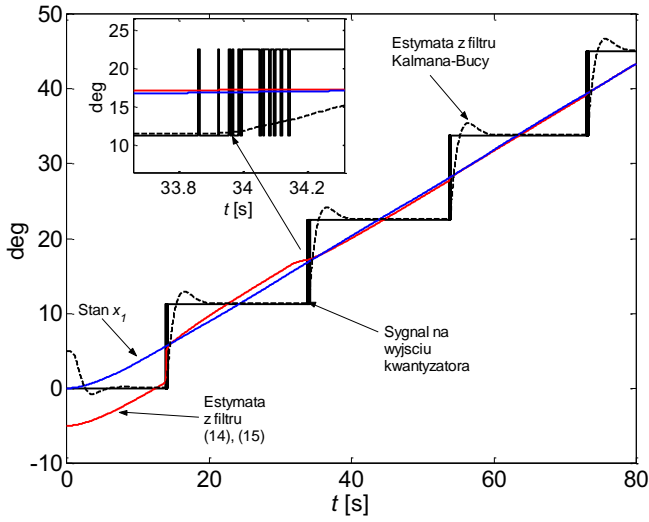
przy czym

$$R = \sigma^2 = 10^{-6}, \Delta = 2\pi/32, x_a = [0, 0]^T, P = \text{diag}([10^{-6}, 10^{-6}]), u(t) = 0.01, t \geq 0.$$

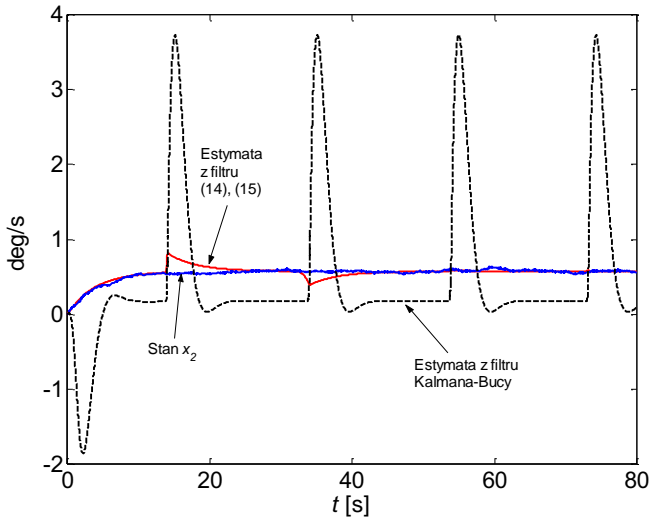
Na rysunkach 7 i 8 porównano działanie filtru (14), (15) z działaniem filtru Kalmana-Bucy'ego.

Przyjęto okres dyskretyzacji czasu  $\Delta t = 0.005$ . Warunki początkowe dla filtru (15), (16) i filtru KB wynosiły odpowiednio  $\hat{x}(0) = [-5, 0]^T$ ,  $\hat{x}_{KB}(0) = [5, 0]^T$ . Długookresowe symulacje dają oszacowanie  $E_{KB} = 4.217$ ,  $E_Q = 0.1154$ ,  $E_{KB}/E_Q = 36.53$ . A zatem filtr (14), (15) ma około trzydzieści sześć razy mniejszy błąd niż filtr KB.

**Trudności przy numerycznym rozwiązywaniu równań filtru.** Jeżeli intensywność szumu na wyjściu (parametr  $\sigma$ ) jest mała, to układ równań (14), (15) staje się źle uwarunkowany (*stiff*). Zjawisko to, zaobserwowane we wszystkich analizowanych przykładach, jest typowe dla filtrów Kalmana. W celu ominięcia trudności, do całkowania równań filtru zastosowano metodę Radau 5 (Hairer i Wanner 1993). Ponadto początkowa macierz kowariancji powinna mieć możliwie mały wyznacznik. Dobre wyniki uzyskuje się przyjmując  $S(0) = 10^{-6}I$ .



Rys. 7. Porównanie działania filtru (14), (15) z działaniem filtru Kalmana-Bucy’ego. Estymacja położenia



Rys. 8. Porównanie działania filtru (14), (15) z działaniem filtru Kalmana-Bucy’ego. Estymacja prędkości kątowej

## 4. Wnioski

W pracy przedstawiono estymator stanu dla układów liniowych stacjonarnych przy skwantowanych pomiarach wyjść. Zalety estymatora ujawniają się wyraźnie, gdy amplituda sygnału wyjściowego staje się porównywalna z przedziałem kwantyzacji. W rozważanych przypadkach średni błąd estymacji był kilka do kilkudziesięciu razy mniejszy niż średni błąd standardowego filtru KB. Jeżeli stosunek  $\Delta/\delta$  jest mały, to stosowanie filtru (14), (15) staje się nieuzasadnione, gdyż dużo prostszy w implementacji filtr KB daje porównywalne błędy (zob. tab. 1, oraz wzór (16)). Rozważany estymator może znaleźć zastosowanie w zadaniach, w których wyjścia obiektu przyjmują wartości w zbiorze przeliczalnym, a pomiary dokonywane są z bardzo małą rozdzielczością (np. estymacja małych prędkości i przemieszczeń w serwomechanizmach). Na skutek utraty informacji w kwantyzatorze estymata stanu jest obciążona i nawet przy braku zakłóceń, błąd estymacji nie musi zmierzać do zera. Ze względu na złe uwarunkowanie równań, filtr (14), (15) jest trudny w implementacji i wymaga stosowania zaawansowanych metod całkowania układów typu *stiff*. Należy jednak podkreślić, że w pewnych przypadkach, błędy estymacji mogą być nawet kilkadziesiąt razy mniejsze niż błędy standardowego filtru KB.

## Literatura

- [1] Abramovitz M., Stegun I. (1970). *Handbook of Mathematical Functions*. 9th edition, Dover publications.
- [2] Baras J.S., Bensoussan A., James M. R. (1988) *Dynamic observers as asymptotic limits of recursive filters: Special cases*. SIAM J. Appl. Math., 48 (1988), 1147–1158.
- [3] Bellman R. (1957). *Dynamic programming*. Princeton University Press.
- [4] Curry, R.E., Vander Velde, W.E., Potter, J.E. (1970). *Nonlinear estimation with quantized measurements-PCM, predictive quantization, and data compression*. IEEE Transactions on Information Theory, IT-16 (2).
- [5] Dürr D., Bach A. (1978). *The Onsager-Machlup Function as Lagrangian for the Most Probable Path of a Diffusion Process*. Commun. Math. Phys. 60, 153–170.
- [6] Hairer i Wanner (1993). *Solving Ordinary Differential Equations vol. I, II*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [7] Hijab O.B. (1979). *Minimum energy estimation*. Ph.D. dissertation, Univ. California, Berkeley.
- [8] Keenan J.C., Lewis J.B. (1976). *Estimation with quantized measurements*. In IEEE conference on decision and control (CDC).
- [9] Klements K.A., Haddad R.A. (1972). *Approximate estimation for systems with quantized data*. IEEE Transactions on Automatic Control, 235–239.
- [10] Meier L.R., Larson R.E., Korsak A.J. (1968). *Optimal filtering with quantized data*. Proc. Joint Automatic control conference, 213–223.
- [11] Mortensen R.E. (1968). *Maximum-likelihood recursive nonlinear filtering*. JOTA, vol. 2, 386–394.
- [12] Onsager L., Machlup S. (1953). *Fluctuations and irreversible processes I, II*. Phys. Rev. 91, 1505; 91, 1512

- [13] Sobczyk L. (1993). *Równania momentów w stochastycznych układach dynamicznych*. PWN, Warszawa.
- [14] Sur J., Paden B.E. (1998). *State observer for linear time invariant systems with quantized output*. Journal of Dynamical Systems, Measurements and Control, 120, 423–426.
- [15] Sviestins E., Wigren T. (2000). *Optimal recursive state estimation with quantized measurements*. IEEE Trans. on Automatic Control, 45(4):762–767.
- [16] Takahashi Y., Watanabe S. (1981). *The probability functional (Onsager-Machlup function) of stochastic processes*. Springer Lecture Notes in Mathematics, 851, 433–463.
- [17] Takahashi Y., Watanabe S. (1981). *The probability functional (Onsager-Machlup function) of stochastic processes*. Springer Lecture Notes in Mathematics, 851, 433–463.
- [18] Todorov E. (2008). *General duality between optimal control and estimation*. In proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 4286–4292. <http://www.cs.washington.edu/homes/todorov/papers/duality.pdf>
- [19] Todorov E. (2010). *Finding the Most Likely Trajectories of Optimally-Controlled Stochastic Systems*. Preprint <http://www.cs.washington.edu/homes/todorov/papers/maximum.pdf>
- [20] Wilkie J. (2004). *Numerical methods for stochastic differential equations*. Physical Review E, 70, 017701.