

Bogdan Skorupa\*

## **Wyznaczenie drugoróżnicowych całkowitoliczbowych nieoznaczoności cykli w pomiarach fazowych GPS zarejestrowanych na punktach lokalnej sieci stacji permanentnych\*\***

### **1. Wstęp**

W ciągu ostatnich kilku lat opracowano szereg algorytmów zwiększających efektywność pomiarów GPS, wykonywanych na obszarach ograniczonych punktami lokalnych sieci stacji permanentnych. Istotną częścią tych algorytmów jest proces estymacji lokalnych różnicowych modeli refrakcji jonosferycznej i troposferycznej. Proces ten poprzedza się wstępnym opracowaniem pomiarów zarejestrowanych na punktach sieci stacji permanentnych GPS, w celu wyznaczenia całkowitoliczbowych początkowych nieoznaczoności cykli fazowych [2, 4]. W typowych zadaniach spotykanych w praktyce geodezyjnej zakłada się, że współrzędne jednego z końców wektora GPS są znane, zaś niewiadomymi są całkowitoliczbowe nieoznaczoności cykli fazowych oraz współrzędne drugiego końca wektora. W tego rodzaju zagadnieniach, wyznaczenie nieoznaczoności fazy stanowi jedynie etap pośredni w procesie obliczania współrzędnych punktu wyznaczanego. Natomiast w algorytmach estymacji lokalnych różnicowych modeli refrakcji korzysta się z faktu, że współrzędne geodezyjne stacji permanentnych GPS są wyznaczone z wysoką precyzją, w danym jednolitym układzie odniesienia. Dlatego w procesie opracowania pomiarów fazowych GPS zarejestrowanych na punktach sieci stacji permanentnych można założyć, że współrzędne obydwu końców wektora GPS są znane, wówczas jedynymi niewiadomymi są całkowitoliczbowe, początkowe nieoznaczoności cykli fazowych. Jednakże realizacja tego założenia nie jest możliwa przy użyciu dostępnych Autorowi programów firmowych. W związku z tym opracowano program komputerowy RBS umożliwiający wyznaczenie całkowitoliczbowych nieoznaczo-

---

\* Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska

\*\* Praca wykonana w ramach badań statutowych nr. 11.11.150.478

ności cykli fazowych, przy założeniu stałości współrzędnych końców wektora GPS. W niniejszej pracy zaprezentowano porównanie efektywności wyznaczania całkowitoliczbowych nieoznaczoności cykli fazowych przy użyciu programu firmowego AOS v. 1.6 oraz programu autorskiego RBS. Celem przeprowadzonych testów obliczeniowych było wykazanie, że założenie stałości współrzędnych końców wektora GPS prowadzi do uproszczenia procesu wyznaczania całkowitoliczbowych nieoznaczoności fazy oraz zwiększenia jego efektywności.

## 2. Podstawy teoretyczne

W lokalnych sieciach stacji permanentnych odległości między stacjami pomiarowymi GPS wynoszą 50–100 km. Dla tak długich wektorów wyznaczenie całkowitoliczbowych początkowych nieoznaczoności cykli fazowych w drugich różnicach jest utrudnione, głównie z powodu wpływu refrakcji jonosferycznej. Dlatego pomiary fazowe zarejestrowane na punktach sieci stacji permanentnych opracowuje się przy użyciu kombinacji liniowych częstotliwości  $f_1$  i  $f_2$ . W niniejszym opracowaniu przeprowadzono testy obliczeniowe w oparciu o dwie kombinacje liniowe pomiarów fazowych GPS:  $L_5$  (*wide - lane*) oraz  $L_3$  (*ionosphere - free*). Kombinacja liniowa  $L_3$  jest wolna od wpływu refrakcji jonosferycznej, zaś w kombinacji liniowej  $L_5$  jest on znacznie zredukowany.

Równania obserwacyjne kombinacji liniowych  $L_5$  i  $L_3$  pomiarów fazowych GPS, dla danej epoki pomiarowej, przedstawia się w następującej postaci [1]:

$$\nabla \Delta \varphi_5 = \lambda_5 (\nabla \Delta \varphi_1 - \nabla \Delta \varphi_2) = \nabla \Delta \rho + \nabla \Delta T + \lambda_5 \nabla \Delta N_5, \quad (1)$$

$$\nabla \Delta \varphi_3 = k_1 \lambda_1 \nabla \Delta \varphi_1 - k_2 \lambda_2 \nabla \Delta \varphi_2 = \nabla \Delta \rho + \nabla \Delta T + \frac{c}{f_1 + f_2} \nabla \Delta N_1 + \frac{cf_2}{f_1^2 - f_2^2} \nabla \Delta N_5, \quad (2)$$

gdzie

$$k_1 = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2}, \quad k_2 = \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \quad (3)$$

W powyższych równaniach  $\nabla \Delta \varphi_5$  i  $\nabla \Delta \varphi_3$  są, wyrażonymi w metrach, podwójnymi różnicami kombinacji liniowych obserwacji fazowych GPS, odpowiednio  $L_5$  i  $L_3$ . Przez  $\nabla \Delta N_1$  i  $\nabla \Delta N_5$  oznaczono początkowe nieoznaczoności cykli fazowych w drugich różnicach dla częstotliwości  $f_1$  oraz kombinacji liniowej  $L_5$ . Przez  $c$  oznaczono prędkość światła, zaś przez  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  i  $\lambda_5$  długości fali częstotliwości  $f_1$ ,  $f_2$  oraz kombinacji liniowej  $L_5$ . Składnik  $\nabla \Delta \rho$  jest podwójną różnicą odległości między środkami fazowymi anten satelitów GPS a środkami fazowymi odbiorników sygnałów GPS, natomiast składnik  $\nabla \Delta T$  jest drugoróżnicową poprawką troposferyczną.

Poprawkę tę oblicza się przy użyciu odpowiedniego modelu refrakcji troposferycznej [3]. Niewiadomymi są współrzędne punktu wyznaczanego zawarte w składnikach  $\nabla\Delta\rho$  równań (1) i (2) oraz początkowe nieoznaczoneści cykli fazowych w drugich różnicach:  $\nabla\Delta N_5$  w równaniu (1) oraz  $\nabla\Delta N_1$  w równaniu (2).

Na wstępie, równania obserwacyjne należy zlinearyzować, ponieważ  $\nabla\Delta\rho$  jest nieliniową funkcją współrzędnych końców wektora GPS. Po zlinearyzowaniu i pogrupowaniu wyrazów, zestawia się układ równań obserwacyjnych, który w zapisie macierzowym przyjmuje następującą postać [6]:

$$L = Ax + Bn + v, \quad (4)$$

gdzie A i B są macierzami planu obserwacji odpowiednio dla współrzędnych punktu wyznaczanego i dla początkowych nieoznaczoneści cykli fazowych. Przez L oznacza się wektor wyrazów wolnych, zaś v jest wektorem odchyłek losowych. Przez x i n oznaczono wektory obliczanych współrzędnych punktu wyznaczanego oraz początkowych nieoznaczoneści cykli fazowych.

W wyniku rozwiązania układu równań (4) metodą najmniejszych kwadratów, otrzymuje się wektor obliczonych niewiadomych wraz z macierzą wariancyjno-kowariancyjną [5]:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{n} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} Q_{\hat{x}} & Q_{\hat{x}\hat{n}} \\ Q_{\hat{n}\hat{x}} & Q_{\hat{n}} \end{pmatrix} \quad (5)$$

W szczególnym przypadku, kiedy współrzędne końców wektora GPS przyjmuje się jako stałe, równanie (4) otrzymuje następującą postać:

$$L - Ax = Bn + v \quad (6)$$

Rozwiązaniem równania (6) jest wektor początkowych nieoznaczoneści cykli fazowych  $\hat{n}$  w postaci liczb rzeczywistych oraz odpowiednia macierz wariancyjno-kowariancyjna  $Q_{\hat{n}}$ . Jest to tzw. rozwiązanie typu „float”. W kolejnym kroku algorytmu nieoznaczoneści typu „float” należy zaokrąglić do liczb całkowitych. Do najczęściej stosowanych metod wyznaczania całkowitoliczbowych początkowych nieoznaczoneści cykli fazowych należy tzw. metoda poszukiwań (ang. *search method*). Danymi wejściowymi w tej metodzie są początkowe nieoznaczoneści cykli fazowych otrzymane z rozwiązania typu „float” wraz z odpowiednią macierzą wariancyjno-kowariancyjną. Na ich podstawie ustala się zbiór potencjalnych całkowitoliczbowych wartości nieoznaczoneści cykli fazowych (tzw. przestrzeń poszukiwań). Następnie poszukuje się optymalnego zestawu wartości nieoznaczoneści, badając wszystkie możliwe kombinacje liczb całkowitych należących do tej przestrzeni [3].

Kryterium identyfikacji optymalnego zestawu całkowitoliczbowych początkowych nieoznaczoności cykli fazowych jest konstruowane w oparciu o następującą zależność [5]

$$R_i = (\hat{n} - n_i)^T Q_{\hat{n}}^{-1} (\hat{n} - n_i) \quad (7)$$

W równaniu (7) wektor  $n_i$  zawiera  $i$ -ty zestaw wartości całkowitoliczbowych początkowych nieoznaczoności cykli fazowych będący podzbiorem przestrzeni poszukiwań. Natomiast  $R_i$  oznacza wartość wyrażenia (7) obliczoną dla wektora  $n_i$ . Zakłada się, że wektor  $n_r$ , który po podstawieniu do (7) daje najmniejszą wartość parametru  $R_r$ , stanowi potencjalnie najlepszy zestaw całkowitoliczbowych nieoznaczoności cykli fazowych. Zestaw ten uznaje się za optymalny jeśli spełniona jest następująca relacja

$$\frac{R_2}{R_1} > \alpha \quad (8)$$

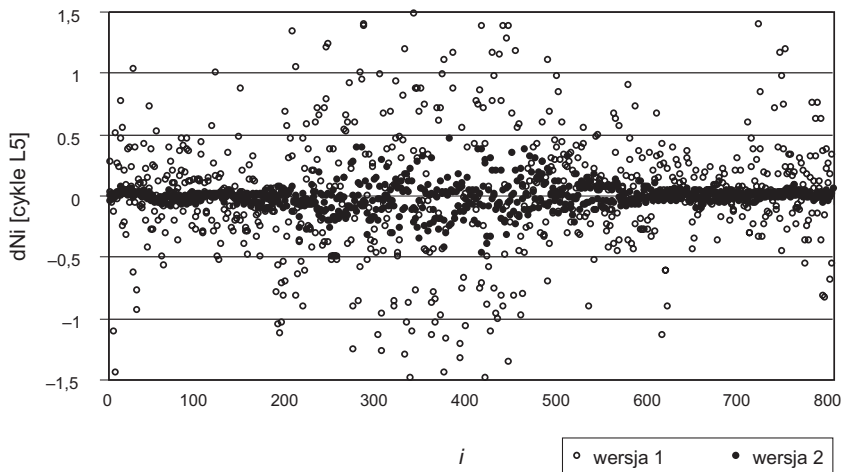
W nierówności (8) przez  $R_1$  oznaczono wartość najmniejszą, zaś  $R_2$  jest kolejną w zbiorze wartości  $R_i$ . W literaturze przedmiotu iloraz  $R_2/R_1$  jest nazywan *Integer Search Ratio* (ISR), natomiast  $\alpha$  jest stałą dobraną empirycznie [6]. W zamieszczonych w pracy przykładach numerycznych przyjęto wartość  $\alpha = 1,8$ .

W niniejszym opracowaniu rozwiązanie układu równań w postaci (4) realizowano przy użyciu programu AOS v. 1.6, natomiast układ równań (6) rozwiązywano programem autorskim RBS. Proces obliczeniowy, prowadzący do wyznaczenia niewiadomych  $\nabla\Delta N_1$  i  $\nabla\Delta N_5$ , składa się z czterech etapów. Najpierw wyznacza się nieoznaczoności  $\nabla\Delta N_5$  w postaci liczb rzeczywistych, na podstawie rozwiązania układu równań obserwacyjnych w postaci (4) lub (6), zestawionych dla kombinacji liniowej  $L_5$  (1). Następnie obliczone wartości  $\nabla\Delta N_5$  zaokrągla się do liczb całkowitych, stosując metodę poszukiwań. Wartości nieoznaczoności  $\nabla\Delta N_1$  oblicza się w wyniku rozwiązania układu równań obserwacyjnych w postaci (4) lub (6), zestawionych dla kombinacji liniowej  $L_3$  (2), z uwzględnieniem obliczonych całkowitoliczbowych wartości  $\nabla\Delta N_5$ . Całkowitoliczbowe wartości  $\nabla\Delta N_1$  wyznaczano jak poprzednio metodą poszukiwań.

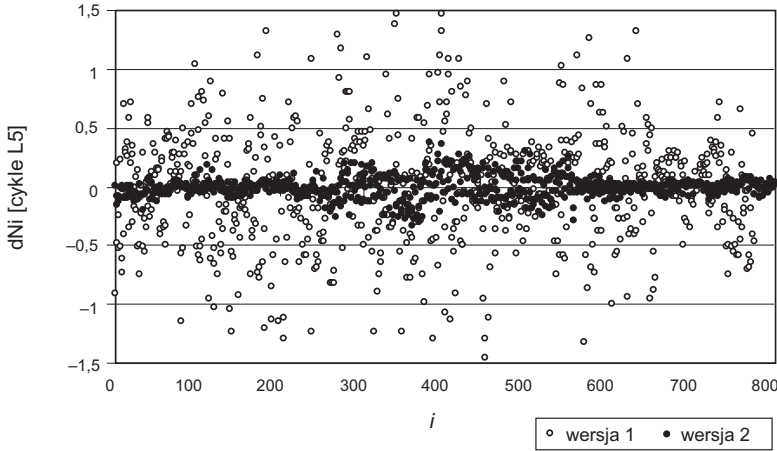
### 3. Opis eksperymentów obliczeniowych

Przedstawione metody wyznaczania całkowitoliczbowych początkowych nieoznaczoności cykli fazowych testowano przy użyciu pomiarów GPS zarejestrowanych na punktach sieci stacji permanentnych ASG-PL. Opracowano całodobowe pomiary GPS, zarejestrowane podczas następujących sesji obserwacyjnych: 5.11.2003 (KRAW-KATO) oraz 7.11.2005 (KRAW-WODZ). Pomiary całodobowe podzielono na dziesięciminutowe sesje obliczeniowe. Wszystkie sesje opracowano w dwu wersjach obli-

zeniowych, przy użyciu programu AOS v. 1.6 (wersja 1) oraz autorskiego programu RBS (wersja 2). W wersji 1 założono, że współrzędne jednego z punktów wektora GPS są znane, natomiast współrzędne drugiego punktu wyznacza się wraz z wartościami początkowych nieoznaczoności cykli fazowych, rozwiązując układ równań obserwacyjnych, opisany zależnością (4). W wersji 2 założono, że współrzędne obydwu końców wektora GPS są znane. W tej wersji obliczeń rozwiązywano układ równań obserwacyjnych (6), gdzie niewiadomymi są początkowe nieoznaczoności cykli fazowych w drugich różnicach. Przestrzeń poszukiwań potencjalnych wartości całkowitoliczbowych nieoznaczoności cykli fazowych generowano przy użyciu wartości  $20\sigma_i$ , gdzie  $\sigma_i$  oznacza odchylenie standardowe uzyskane z rozwiązania typu „float” dla  $i$ -tej drugoróżnicowej nieoznaczoności cykli fazowych [6]. W obydwu wersjach obliczeń użyto pomiarów fazowych sygnałów GPS od satelitów znajdujących się powyżej  $15^\circ$  nad horyzontem stanowiska pomiarowego. W opracowaniu zastosowano model refrakcji troposferycznej Saastamoinena, przy założeniu jednakowych warunków atmosferycznych dla obydwu stacji ( $t = 20^\circ\text{C}$ ,  $p = 1010 \text{ hPa}$ ,  $e = 50\%$ ). Współrzędne satelitów GPS obliczono przy użyciu efemerydy pokładowej. Całkowitoliczbowe nieoznaczoności cykli fazowych w drugich różnicach, uzyskane w wyniku opracowania 144 dziesięciominutowych sesji obliczeniowych ponumerowano, przyporządkowując im kolejne liczby całkowite. Na rysunkach 1 i 2 zaprezentowano porównanie odchyłek  $dN_i$  wartości nieoznaczoności cykli fazowych kombinacji liniowej  $L_5$ , uzyskanych z rozwiązania typu „float”  $\nabla\Delta\hat{N}_i$ , od ich wartości całkowitoliczbowych  $\nabla\Delta N_i$ , gdzie  $i$  oznacza numer sesji obliczeniowej.



**Rys. 1.** Odchyłki  $dN_i$  uzyskane w wyniku opracowania wektora KRAW-KATO (DOY 309, 2003) w 144 dziesięciominutowych sesjach, w dwu wersjach obliczeń, przy użyciu kombinacji liniowej  $L_5$



**Rys. 2.** Odchyłki  $dN_i$  uzyskane w wyniku opracowania wektora KRAW-WODZ (DOY 311, 2005) w 144 dziesięciominutowych sesjach, w dwu wersjach obliczeń, przy użyciu kombinacji liniowej  $L_5$

Porównanie przeprowadzono dla dwu wersji obliczeń, zgodnie z zależnością

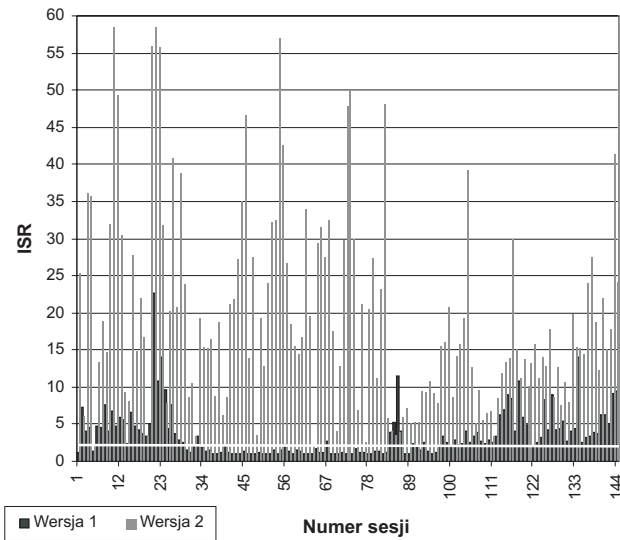
$$dN_i = \nabla \Delta \hat{N}_i - \nabla \Delta N_i \quad (9)$$

W drugiej wersji obliczeń wartości początkowych nieoznaczoności cykli fazowych kombinacji liniowej  $L_5$  były istotnie bliższe wartościom całkowitoliczbowym, w porównaniu z wersją pierwszą. Średnia arytmetyczna obliczona dla zbioru wartości bezwzględnych  $|dN_i|$ , wyrażona w cyklach  $L_5$ , w pierwszej wersji obliczeń wyniosła 0,44, zaś w drugiej wersji 0,06. W obydwu wersjach obliczeń, we wszystkich sesjach uzyskano wartości  $ISR > 1,8$ .

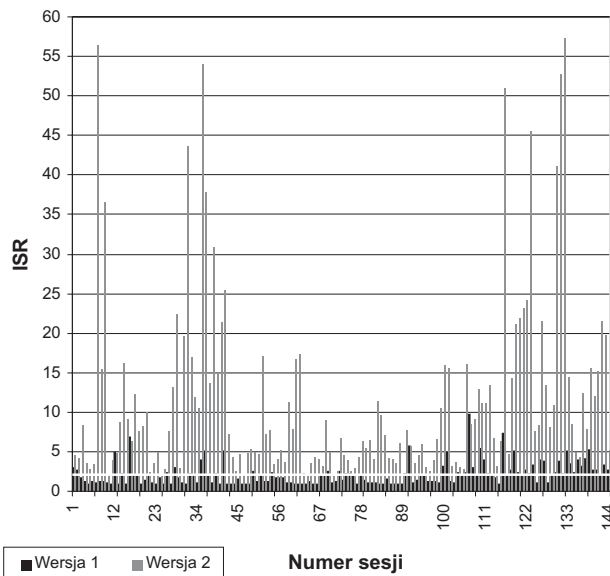
Kolejny etap opracowania wektorów testowych polegał na obliczeniu wartości, przy użyciu kombinacji liniowej  $L_3$  (2) z uwzględnieniem obliczonych całkowitoliczbowych wartości. Na rysunkach 3 i 4 zaprezentowano porównanie wartości  $ISR$  dla dwu wersji obliczeń. Białą poziomą kreską zaznaczono graniczną wartość  $ISR = 1,8$ . W pierwszej wersji obliczeń, dla wektora KRAW-KATO relacja  $ISR > 1,8$  została spełniona dla 61 % sesji obliczeniowych, zaś dla wektora KRAW-WODZ tylko dla 52% sesji.

W drugiej wersji obliczeń we wszystkich sesjach uzyskano  $ISR > 1,8$ . Ponadto średnia wartość  $ISR$  obliczona dla 288 sesji obliczeniowych, opracowanych przy użyciu kombinacji liniowej  $L_3$  wyniosła 2,8 w pierwszej wersji obliczeń oraz 15,3 w drugiej wersji.

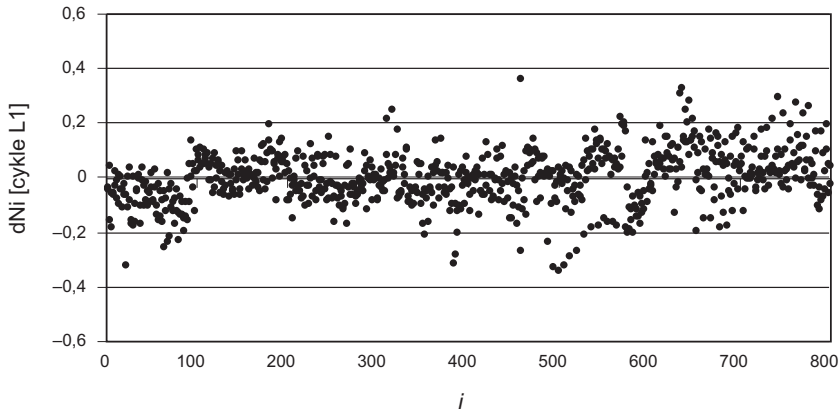
Na rysunkach 5 i 6 zaprezentowano odchyłki wartości początkowych nieoznaczoności cykli fazowych typu „float”, obliczonych przy użyciu kombinacji liniowej  $L_3$ , od ich wartości całkowitoliczbowych.



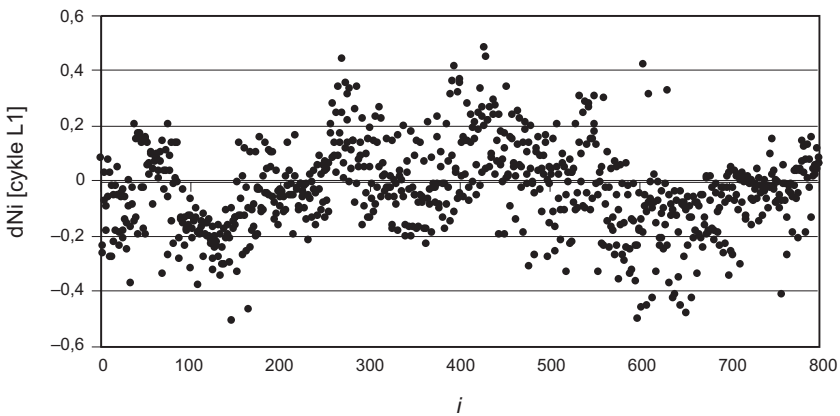
Rys. 3. Porównanie wartości Integer Search Ratio, uzyskanych w wyniku opracowania wektora KRAW-KATO (DOY 309, 2003) w 144 dziesięciminutowych sesjach, w dwu wersjach obliczeń, przy użyciu kombinacji liniowej  $L_3$



Rys. 4. Porównanie wartości Integer Search Ratio, uzyskanych w wyniku opracowania wektora KRAW-WODZ (DOY 311, 2005) w 144 dziesięciminutowych sesjach, w dwu wersjach obliczeń, przy użyciu kombinacji liniowej  $L_3$



Rys. 5. Odchyłki  $dN_i$  uzyskane w wyniku opracowania wektora KRAW-KATO (DOY 309, Y 2003) w 144 dziesięciominutowych sesjach, przy użyciu kombinacji liniowej  $L_3$



Rys. 6. Odchyłki  $dN_i$  uzyskane w wyniku opracowania wektora KRAW-WODZ (DOY 311, 2005) w 144 dziesięciominutowych sesjach, przy użyciu kombinacji liniowej  $L_3$

Średnia arytmetyczna z wartości bezwzględnych  $|dN_i|$  wyrażona w cyklach  $L_1$ , wyniosła 0,1, przy czym 96,3% odchyłek spełniało zależność  $|dN_i| < 0,3$ .

#### 4. Uwagi końcowe

Na podstawie wyników przeprowadzonych eksperymentów obliczeniowych stwierdza się wzrost efektywności procesu wyznaczania całkowitoliczbowych początkowych nieoznaczoności cykli w pomiarach fazowych uzyskanych na punk-



tach sieci stacji permanentnych przy zastosowaniu warunku stałości współrzędnych punktów końcowych wektora GPS. Podejście to prowadzi do poprawnych rezultatów, zaś wiarygodność rozwiązań jest potwierdzona przez wysokie wartości ilorazu ISR. Opisaną metodę wyznaczania całkowitoliczbowych początkowych nieoznaczoności cykli fazowych można zastosować w procesie wyznaczania różnicowych modeli refrakcji jonosferycznej i troposferycznej o wysokiej rozdzielczości czasowej. Koncepcja przedstawiona w niniejszym artykule stanowi punkt wyjścia do dalszych prac, związanych z projektowaniem efektywnych i niezawodnych metod opracowania pomiarów GPS, wykonywanych na obszarach ograniczonych punktami lokalnych sieci stacji permanentnych.

## Literatura

- [1] Chen H.Y.: *An Instantaneous Ambiguity Resolution Procedure Suitable for Medium-Scale GPS Reference Station Networks*. "13th Int. Tech. Meeting of the Satellite Division of the U.S. Inst. of Navigation", Salt Lake City, Utah 19-22.09.2000, 2000, 1061–1070.
- [2] Góral W.: *Precyzyjny pomiar wysokości elipsoidalnej za pomocą GPS na obszarze ograniczonym siecią stacji permanentnych KRAW + ASG-PL*, Półrocznik AGH Geodezja t. 9, z. 2/1, Wydawnictwa AGH, Kraków, 2003, 217–223.
- [3] Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Collins J.: *Global Positioning System Theory and Practise*, Springer-Verlag 1993.
- [4] Skorupa B.: *Zwiększenie efektywności technologii GPS poprzez estymację lokalnej refrakcji różnicowej*. Rozprawa doktorska, AGH Kraków 2003 (Praca nie publikowana).
- [5] Teunissen P. J. G.: *The least – squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation*, Journal of Geodesy Vol. 70, No. 1–2, 1995, 65–82.
- [6] Wang J., Steward P., Tsakiri M.: *A Comparative Study of the Integer Ambiguity Validation Procedures*. Earth, Planets & Space, vol. 52, 2000, 813–817.