

Jan Gmyrek\*

## **Analiza wpływu dodatkowych pomiarów GPS na dokładność osnowy realizacyjnej\*\***

### **1. Wprowadzenie**

Pomiary geodezyjne związane z budową i realizacją różnego rodzaju inwestycji wykonuje się w nawiązaniu do osnowy realizacyjnej. W zależności od potrzeb i rodzaju tyczonego obiektu stosuje się różnego typu osnowy realizacyjne. Osnowy te mają umożliwić wytyczenie obiektu z wymaganą dokładnością. Na dokładność wytyczenia obiektu ma wpływ nie tylko dokładność samego tyczenia, ale również niedokładność osnowy.

Powszechnie stosowane tachymetry umożliwiają założenie osnowy o stosunkowo wysokiej dokładności. Niekiedy może jednak się zdarzyć, że taka dokładność jest niewystarczająca. Pojawia się zatem konieczność podwyższenia jej dokładności. Można to zrobić poprzez dokładniejszy pomiar kątów i długości (więcej serii), pomiar dodatkowych kątów i długości lub poprzez dodatkowe pomiary przy zastosowaniu GPS. W artykule przedstawiono wpływ dodatkowych pomiarów GPS na dokładność kilku typów osnow realizacyjnych.

Rozpatrzono trzy rodzaje osnow:

- 1) ciągi prostoliniowe,
- 2) sieci trójkątów,
- 3) sieć dowolnego kształtu.

We wszystkich przypadkach obliczano macierz wariancyjną danej osnowy przy założeniu, że średni błąd pomiaru kąta wynosi  $30''$ , a średni błąd pomiaru długości – 5 mm. Następnie dodawano równania obserwacyjne dla pomiarów GPS na jednym lub dwóch punktach sieci, przyjmując ich dokładność – charakteryzowaną średnim błędem położenia punktu – wynoszącą 2, 3 lub 4 mm. Dla takich układów równań obserwacyjnych liczone macierze wariancyjne, przyjmując średni

---

\* Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

\*\* Artykuł powstał w ramach badań statutowych nr 11.11.150.312 finansowanych przez KBN w 2006 r.

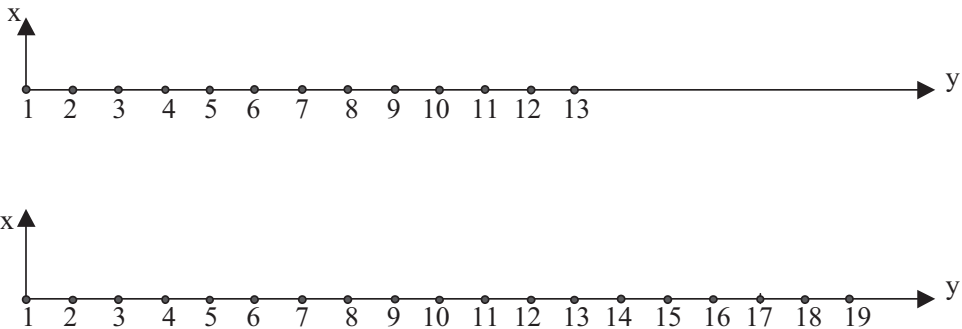
błąd jednostkowy  $m_0$  równy jeden. Macierze te umożliwiły obliczenie średnich błędów położenia punktów, średnich błędów długości boków, średnich błędów kątów oraz elementów elips błędów średnich. Parametry te pozwoliły na przeprowadzenie porównawczej oceny dokładności analizowanych osnów w aspekcie wpływu dodatkowych pomiarów GPS na ich dokładność.

## 2. Ciągi prostoliniowe

Rozpatrzono dwa ciągi prostoliniowe o długości 2400 m i 3600 m (rys. 1). Długości wszystkich boków wynoszą po 200 m. Punkty początkowy i końcowy przyjęto za stałe. Oś Y zgodna z kierunkiem ciągu. Całość obliczeń ujęto w 14 wariantach (tab. 1). Pierwsze siedem wariantów odnosi się do ciągu krótszego, następnym do dłuższego. Wariant I jest bez punktów GPS. W wariantach II, III i IV na punkcie 7 założono pomiar GPS o podanej w tabeli dokładności położenia punktu. Analogiczną dokładność pomiarów GPS założono w wariantach V, VI i VII, ale na punktach 5 i 9. Dla ciągu dłuższego wariant VIII jest bez punktów GPS. W wariantach IX, X i XI założono pomiar GPS na punkcie 10, stosując wymienione trzy rodzaje dokładności. Analogiczne dokładności zastosowano w wariantach XII, XIII i XIV, ale na dwóch punktach GPS.

W obliczeniach zastosowano następujące oznaczenia:

- $m_p$  – średni błąd położenia punktu GPS,
- $m_\alpha$  – przeciętna wartość średniego błędu kąta po wyrównaniu,
- $m_{pp}$  – przeciętna wartość średniego błędu położenia punktu po wyrównaniu,
- $m_{pm}$  – maksymalny błąd położenia punktu po wyrównaniu,
- $A_p, B_p$  – przeciętne wartości półosi elips błędów średnich.



Rys. 1. Ciągi prostoliniowe

**Tabela 1.** Zestawienie parametrów oceny dokładności ciągów

Wariant	Punkty GPS		$m_{\alpha}$ [cc]	$m_d$ [mm]	$m_{pp}$ [mm]	$m_{pm}$		$A_p$ [mm]	$B_p$ [mm]
	numer punktu	$m_p$ [mm]				numer punktu	[mm]		
I	–	–	30,0	4,8	35,4	7	57,6	34,9	6,1
II	7	2,0	26,0	4,6	11,6	4	18,7	10,7	4,3
III	7	2,8	26,0	4,6	11,7	4	18,7	10,8	4,3
IV	7	4,0	26,0	4,6	11,9	10	18,8	10,9	4,5
V	5 i 9	2,0	23,6	4,4	6,8	11	11,2	5,9	3,4
VI	5 i 9	2,8	23,6	4,4	7,0	11	11,3	6,0	3,6
VII	5 i 9	4,0	23,6	4,4	7,3	3	11,4	6,3	3,8
VIII	–	–	30,0	4,9	66,1	10	104,7	65,6	7,8
IX	10	2,0	27,4	4,7	20,6	5	32,6	19,9	5,5
X	10	2,8	27,4	4,7	20,7	5	32,6	19,9	5,5
XI	10	4,0	27,4	4,7	20,8	15	32,7	20,0	5,7
XII	7 i 13	2,0	25,8	4,6	11,5	4	18,5	10,6	4,4
XIII	7 i 13	2,8	25,8	4,6	11,6	4	18,6	10,7	4,6
XIV	7 i 13	4,0	25,8	4,6	11,9	16	18,6	10,8	4,7

Obliczone parametry dokładnościowe zestawiono w tabeli 1. Z tabeli tej wynika, że dla obu typów sieci dodanie jednego pomiaru GPS na jednym środkowym punkcie powoduje nieznaczne zmniejszenie przeciętnych wartości średnich błędów kątów i długości boków, przy czym nie jest istotna dokładność tego pomiaru GPS (2 czy 4 mm). Inaczej przedstawia się sprawa w odniesieniu do średnich błędów położenia punktów oraz półosi elis błędów średnich. Dodanie pomiaru GPS na jednym, środkowym punkcie powoduje w obu osnowach ponad trzykrotne zmniejszenie przeciętnych wartości średniego błędu położenia punktu oraz ponad trzykrotne zmniejszenie przeciętnej wartości dużej półosi elipsy błędu średniego. Przeciętna wartość małej półosi elipsy błędu średniego maleje średnio o około  $\frac{1}{4}$ . Również ponad trzykrotnie zmniejsza się maksymalna wartość średniego błędu położenia punktu.

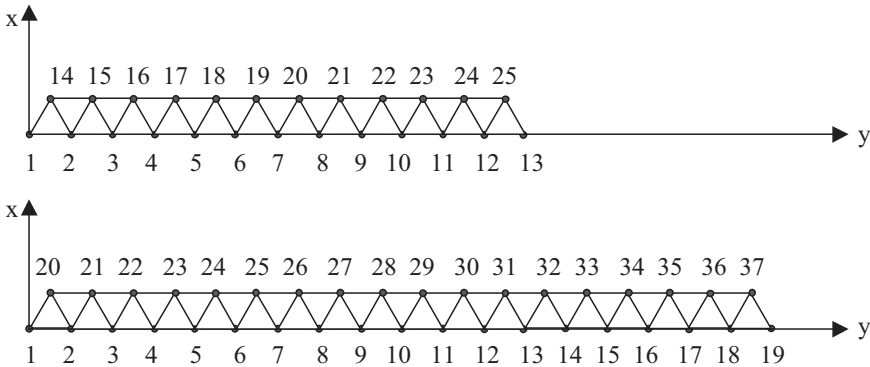
Dodanie pomiarów GPS na dwóch w przybliżeniu symetrycznie położonych punktach powoduje nieistotne zmniejszenie przeciętnej wartości średnich błędów długości oraz zmniejszenie przeciętnej wartości średnich błędów kątów o około  $\frac{1}{5}$  w przypadku ciągu krótszego i  $\frac{1}{3}$  w przypadku ciągu dłuższego. Dla wariantów

V, VI i VII, przeciętna wartość średniego błędu położenia punktu zmniejszyła się pięciokrotnie, przeciętna wartość półosi A elips błędów średnich zmniejszyła się prawie sześciokrotnie, natomiast półosi B zmniejszyła się prawie o połowę. Dla wariantów XII, XIII i XIV, przeciętna wartość średniego błędu położenia punktów zmniejszyła się prawie sześciokrotnie. Przeciętna wartość półosi A elipsy błędów zmniejszyła się również sześciokrotnie, natomiast półosi B – o  $\frac{1}{4}$ .

Warto tu zwrócić uwagę, że przyjęty średni błąd pomiaru kąta  $30^{\text{cc}}$  i średni błąd pomiaru długości 5 mm przy bokach osnowy o długości 200 m. oznacza, że pomiary długości są dwa razy dokładniejsze od pomiarów kąta. Równocześnie azymuty półosi A są równoległe do osi X. Dodanie pomiaru GPS usztywnia ciąg szczególnie właśnie w kierunku osi X, stąd tak duże zmniejszanie się półosi A elips błędów.

### 3. Sieci trójkątów

Rozpatrzono dwie sieci prostoliniowe o długości 2400 m i 3600 m (rys. 2). Długości wszystkich boków wynoszą po 200 m. Punkty początkowy i końcowy przyjęto za stałe. Całość obliczeń ujęto w 14 wariantach. Pierwsze siedem wariantów odnosi się do sieci krótszej, następane do dłuższej. Wariant I jest bez punktów GPS.



Rys. 2. Sieci trójkątów

W wariantach II, III i IV na punkcie 7 założono pomiar GPS o podanej w tabeli dokładności położenia punktu wynoszącej 2 mm, 3 mm i 4 mm. Analogiczną dokładność pomiarów GPS założono w wariantach V, VI i VII, ale na punktach 5 i 9. Dla ciągu dłuższego wariant VIII jest bez punktów GPS. W wariantach IX, X i XI założono pomiar GPS na punkcie 10 stosując trzy rodzaje dokładności. Analogiczne dokładności zastosowano w wariantach XII, XIII i XIV, lecz na dwóch punktach GPS.

**Tabela 2.** Zestawienie parametrów oceny dokładności ciągów trójkątów

Wariant	Punkty GPS		$m_{\alpha}$ [cc]	$m_d$ [mm]	$m_{pp}$ [mm]	$m_{pm}$		$A_p$ [mm]	$B_p$ [mm]
	numer punktu	$m_p$ [mm]				numer punktu	[mm]		
I	–	–	15,4	3,8	2,2	7	3,3	21,8	5,2
II	7	2,0	15,1	3,8	0,9	4	1,3	8,4	3,8
III	7	2,8	15,2	3,8	0,9	4	1,3	8,5	3,9
IV	7	4,0	15,2	3,8	0,9	4	1,3	8,6	4,0
V	5 i 9	2,0	14,9	3,7	0,6	3	0,9	5,5	3,3
VI	5 i 9	2,8	14,9	3,7	0,7	3	0,9	5,6	3,4
VII	5 i 9	4,0	14,9	3,7	0,7	11	0,9	5,8	3,6
VIII	–	–	15,4	3,8	4,0	10	3,4	39,1	6,3
IX	10	2,0	15,3	3,8	1,4	5	1,3	13,7	4,6
X	10	2,8	15,3	3,8	1,5	15	1,3	13,8	4,6
XI	10	4,0	15,3	3,8	1,5	5	1,3	14,0	4,7
XII	7 i 13	2,0	15,1	3,7	0,9	4	0,9	8,3	3,9
XIII	7 i 13	2,8	15,1	3,7	0,9	4	0,9	8,4	4,0
XIV	7 i 13	4,0	15,1	3,7	1,0	4	0,9	8,6	4,1

Obliczone parametry dokładnościowe zestawiono w tabeli 2. Wynika z niej, że dla wszystkich wariantów przeciętna wartość średnich błędów kątów zmniejszyła się prawie o połowę, a przeciętna wartość średnich błędów długości zmalała o około  $\frac{1}{4}$ . Ciekawe jest to, że praktycznie takie samo zmniejszenie wymienionych błędów wystąpiło w sieciach bez dodatkowych pomiarów GPS, czyli inaczej mówiąc – GPS nie przyczynił się do zmniejszenia średnich błędów kątów i długości boków.

Dodanie pomiaru GPS na jednym, środkowym punkcie powoduje w osnowie krótszej zmniejszenie przeciętnych wartości średniego błędu położenia punktu prawie o połowę oraz prawie trzykrotne zmniejszenie przeciętnej wartości półosi A elipsy błędu średniego. Przeciętna wartość półosi B elipsy błędu średniego maleje średnio o około  $\frac{1}{3}$ . Również prawie trzykrotnie zmniejsza się maksymalna wartość średniego błędu położenia punktu.

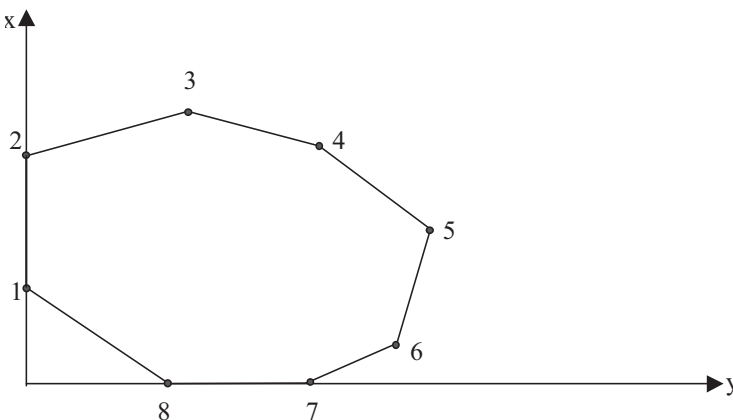
Dodanie pomiaru GPS na jednym, środkowym punkcie w sieci dłuższej powoduje zmniejszenie przeciętnych wartości średniego błędu położenia punktu prawie trzy-

krotnie oraz trzykrotne zmniejszenie przeciętnej wartości półosi A elipsy błędu średniego. Przeciętna wartość półosi B elipsy błędu średniego maleje o L. Również prawie trzykrotnie zmniejsza się maksymalna wartość średniego błędu położenia punktu.

Dodanie pomiarów GPS na dwóch w przybliżeniu symetrycznie położonych punktach spowodowało, że dla wariantów V, VI i VII, przeciętna wartość średniego błędu położenia punktu zmniejszyła się trzykrotnie, przeciętna wartość półosi A elipsy błędów zmniejszyły się również trzykrotnie, natomiast półosi B – o około  $\frac{1}{3}$ . Dla wariantów XII, XIII i XIV przeciętna wartość średniego błędu położenia punktów zmniejszyła się ponad czterokrotnie, przeciętna wartość półosi A elipsy błędów zmniejszyły się prawie pięciokrotnie, natomiast półosi B o  $\frac{1}{3}$ . Również prawie sześciokrotnie zmniejszyła się maksymalna wartość średniego błędu położenia punktu.

#### 4. Sieć dowolnego kształtu

Analizowaną sieć przedstawiono na rysunku 3. Średnia długość boku wynosi 520 m. Do obliczenia macierzy wariancyjnej przyjęto stały punkt 1 i kierunek na punkt 2 oraz takie same jak poprzednio średnie błędy pomiaru kątów i długości. W wariancie I (tab. 3) bez dodatkowych pomiarów GPS przeciętna wartość średniego błędu kąta zmniejszyła się o około  $\frac{1}{4}$ , a średni błąd długości boków nie uległ zmianie. Ponieważ na punkcie 5 wystąpił maksymalny średni błąd położenia punktu, założono na tym punkcie dodatkowy pomiar GPS o średnim błędzie położenia punktu 2 mm, 3 mm i 4 mm. Spowodowało to zmniejszenie przeciętnej wartości średniego błędu kąta o  $\frac{1}{5}$  we wszystkich wariantach, czyli bez względu na dokładność pomiarów GPS.



Rys. 3. Sieć dowolna

**Tabela 3.** Zestawienie parametrów oceny dokładności osnowy dowolnej

Wariant	Punkty GPS		$m_{\alpha}$ [cc]	$m_d$ [mm]	$m_{pp}$ [mm]	$m_{pm}$		$A_p$ [mm]	$B_p$ [mm]
	numer punktu	$m_p$ [mm]				numer punktu	[mm]		
I	–	–	23,8	5,0	24,5	5	41,0	47,6	5,9
II	5	2,0	19,2	4,9	8,2	8	12,6	7,3	3,4
III	5	2,8	19,2	4,9	8,4	8	12,7	7,4	3,6
IV	5	4,0	19,3	4,9	8,6	8	12,7	7,6	3,7

Przeciętna wartość średniego błędu długości praktycznie nie uległa zmianie. Przeciętna wartość średniego błędu położenia punktu zmniejszyła się prawie trzykrotnie. Przeciętna wartość półosi A elipsy błędów zmniejszyła się ponad sześciokrotnie, natomiast półosi B o  $\frac{1}{3}$ . Również ponad trzykrotnie zmniejsza się maksymalna wartość średniego błędu położenia punktu.

## 5. Uwagi końcowe

Przeprowadzone analizy pozwalają stwierdzić, że w przypadku konieczności podwyższenia dokładności osnowy celowe jest zastosowanie dodatkowych pomiarów GPS. W analizowanych sieciach wystarcza w najłagodniejszym jej rejonie wykonać pomiar GPS na jednym punkcie. Zgodnie z Instrukcją G-3 podstawowym kryterium oceny dokładności osnowy realizacyjnej jest średni błąd długości najłagodniej wyznaczonego boku sieci. Z przedstawionych przykładów wynika, że zastosowanie pomiaru GPS nieznacznie poprawia średnie błędy długości boków natomiast nawet kilkakrotnie zmniejsza się przeciętna wartość średniego błędu położenia punktu oraz przeciętna wartość półosi A elipsy błędów średnich.

Jakkolwiek zagadnienie podwyższenia dokładności sieci może być ważne, to ważniejszym problemem jest, czy i jak dodatkowe pomiary wpływają na dokładność pomiaru lub wytyczenia elementów obiektu.

## Literatura

- [1] *Geodezja inżynierska*. PPWK, Warszawa 1990.
- [2] Gmyrek J., Gocał J., Gorczyca J.: *Geodezja inżyniersko-przemysłowa. Zbiór przykładów i zadań*. Wydawnictwo AGH, Kraków 1982.

- 
- [3] Gmyrek J., Gocał J.: *Accuracy Analysis of the Special Railway Control Network*. Geodesy 39, 2002.
- [4] Gocał J.: *Geodezja inżynieryjno-przemysłowa*. Wyd. AGH, Kraków 1999.
- [5] Hausbrandt S.: *Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne*. PPWK, Warszawa 1971.
- [6] Instrukcja techniczna G-3. *Geodezyjna obsługa inwestycji*. GUGiK, Warszawa 1979.
- [7] Skórczyński A.: *Rachunek wyrównawczy*. PPWK, Warszawa 1985.
- [8] Wytyczne techniczne G-3.1. *Osnowy realizacyjne*. GUGiK, Warszawa 1987.
- [9] Wytyczne techniczne G-3.2. *Pomiary realizacyjne*. GUGiK, Warszawa 1981.