

Roman Kinasz*

OCENA NIEZAWODNOŚCI ŻELBETOWEJ KRATOWNICY NA PODSTAWIE OGRANICZONEJ LICZBY DANYCH DOŚWIADCZALNYCH**

1. Wstęp

Przy rozwiązywaniu zadania metodą Monte Carlo (MMC) niezawodność interpretuje się jako stosunek liczby badań, które spełniły test (wszystkie naprężenia lub odkształcenia są mniejsze niż dopuszczalne), do ogólnej liczby doświadczeń liczbowych. Przy założeniu, że funkcje rozkładów i ich parametry znamy wcześniej i precyzyjnie, dokładność metody MMC jest uzależniona od liczby iteracji.

W rzeczywistości, na podstawie badań doświadczalnych konstrukcji, możliwe jest otrzymanie tylko ograniczonej liczby wyników badań, co nie pozwala w wystarczającym stopniu ocenić typ rozkładu prawdopodobieństwa parametrów i ich wielkości. Dla konkretnego wiązara, który został zmontowany w określonym rejonie z właściwymi obciążeniami atmosferycznymi, zarówno pod ciężarem własnym, jak i izolacji, wielkości, które wyznaczone są tylko w 10–15 punktach, ustalenie typu rozkładu prawdopodobieństwa jest znacznie utrudnione. Mało tego, przy rzeczywistym obciążeniu dana konstrukcja nie została zniszczona, mimo badań *in situ* podczas ciągłej eksploatacji, co przy podejściu formalnym ($n/N = 1$) świadczy o jej niezawodności, która równa się 1,0.

2. Metoda wykonania badań

W celu rozwiązywania zadania określającego niezawodność rozpatrywanej konstrukcji, znajdującej się w eksploatacji, proponuje się następujące podejście.

1. Biorąc pod uwagę dużą ilość zmiennych parametrów wejściowych zadania (obciążenie śniegowe, ciężar własny płyt dachowych, warstw hydro-, ciepło- i paraizolacji, różnych

* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

** Wykonano w ramach pracy statutowej nr 11.11.100.588

wariacji wskaźników geometrycznych przekrojów poprzecznych każdego z elementów itd.), liczba parametrów wyjściowych jest niewielka — są to naprężenia w przekrojach poprzecznych 11 elementów. Zniszczenie każdego z nich powoduje zniszczenie całego systemu. Należy wykonywać iterację metodą Monte Carlo na podstawie danych nie generowanych z dość subiektywnie wybranych populacji generalnych, a na podstawie realnie zmierzonych wskaźników, uwzględniając wszystkie możliwe (a nie tylko najbardziej niekorzystne) ich kombinacje.

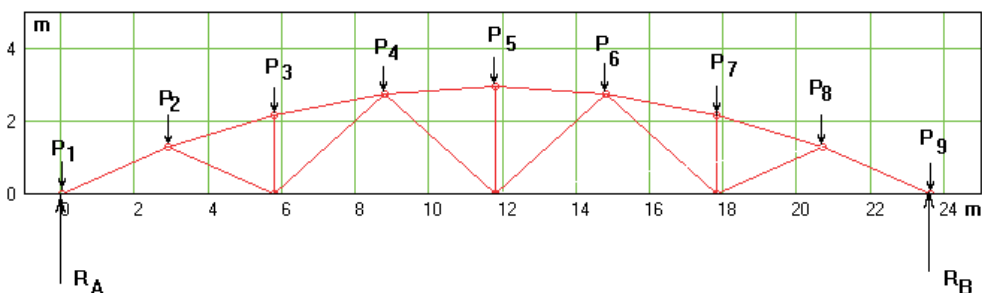
2. Uwzględniając prawidłowości, które wynikają z twierdzeń statystyki matematycznej, skutek wykonania dużej liczby obliczeń ze zmiennymi mającymi rozmaite typy rozkładów, wyniki końcowe obliczeń będą miały bardziej „gładki” wygląd. Rozkład ten teoretycznie będzie dążył do rozkładu normalnego. Ta właściwość teoretyczna niejednokrotnie była sprawdzana w praktyce, zwłaszcza podczas generowania normalnie rozłożonej zmiennej. Dla jakościowego wykonania takiej operacji wystarczy tylko 12 równomiernych rozkładów. Otóż, badając typ rozkładu i jego parametry, będziemy badać nie warunek, a wyniki obliczeń.
3. Oczywiście, przy obliczeniach z wartościami rzeczywistymi nie doprowadzono do zniszczeń konstrukcji. W innym przypadku konstrukcja powinna być zniszczona jeszcze w momencie rozeznania. Dlatego jako etap końcowy oceny niezawodności MMC zamiast ustalenia stosunku n/N zaproponowano następującą procedurę: zamiast gromadzenia ilości odmów (zniszczeń) w doświadczaniu numerycznym, znajdujemy wielkości, której „nie wystarcza” do osiągnięcia stanu granicznego konstrukcji. Oczywiście, w tym przypadku iterację należy przeprowadzać dla całej konstrukcji w każdym cyklu. Inaczej przeprowadza się iterację w metodzie „klasycznej”, gdzie można ją przerwać po osiągnięciu stanu granicznego, w dowolnym elemencie kratownicy, bez uwzględnienia wszystkich innych elementów (co wynika ze statycznej wyznaczalności zadania).

Na podstawie wartości obliczonych „niedoboru” do stanu granicznego formujemy próbkę, która z powodu podanych wyżej warunków ma lepsze wskaźniki w odniesieniu do rodzaju rozkładu niż dane wyjściowe. Oczywiście, wszystkie elementy próbki są pozytywne, ponieważ nie było żadnej odmowy, co oznacza zawyżenie wartości wskaźników rzeczywistych w stosunku do dopuszczalnych (także natury statystycznej i mierzonych doświadczalnie).

W zależności od wyglądu otrzymanego histogramu aproksymuje się go rozkładem normalnym (lub bardziej uniwersalnie — wykładniczo-wielomianowym albo jeszcze lepszym), co pozwala wykonać ekstrapolację wyników — „ogona” rozkładu w obszarze ujemnym wartości. Zauważymy, że aproksymacja (w odróżnieniu od interpolacji) daje jeszcze większe złagodzenie rozkładu wynikowego, przy czym otrzymamy już nie histogram, a wyrażenie w postaci analitycznej, od której możemy wyliczyć całkę, z dowolną dokładnością. Po wykonaniu aproksymacji całkujemy w zakresie od plus nieskończoności do zera, otrzymując ocenę bezpieczeństwa konstrukcji, lub całkujemy w zakresie od zera do minus nieskończoności, otrzymując prawdopodobieństwo jej zniszczenia.

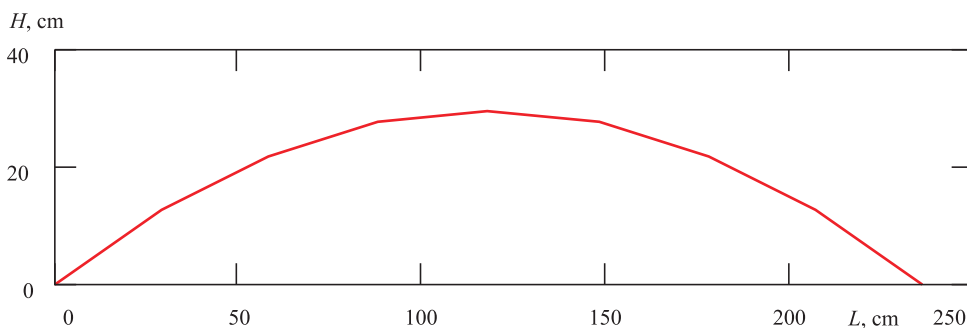
3. Rozwiązanie zadania w ujęciu deterministycznym

Przedmiotem badań były żelbetowe kratownice dachowe. Schemat obliczeniowy podany jest na rysunku 1, według danych na wrzesień i październik 1998 roku, w hali przemysłowej Fabryki Autobusów S.A. we Lwowie. Kratownica typu 2ΦC 24-2 A-IIIb [1], została wyprodukowana i zmontowana w roku 1973.



Rys. 1. Schemat obliczeniowy kratownicy

Obciążenie przykładane w każdym z węzłów pasa górnego kratownicy ma charakter statystyczny. Na początku ustalono siły wewnętrzne w każdym elemencie pasów górnego i dolnego, a także w słupkach i krzyżulcach przy obciążeniu zadaniem P_i . Parametry geometryczne pasa górnego kratownicy zadane są w kształcie parabolicznym (rys. 2).



Rys. 2. Schemat geometryczny pasa górnego kratownicy (parabola)

Zostały obliczone kąty pochylenia elementów kratownicy, które są niezbędne do wyznaczenia reakcji i sił osiowych w prętach metodą równoważenia węzłów. Wyznaczono reakcje podporowe z uwzględnieniem dowolnego obciążenia w węzłach pasa górnego.

Pomijając obliczenia pośrednie, napiszemy formuły końcowe:

$$R_b = \frac{\sum_{i=2}^9 A_{i-1} \cdot P_{i-1}}{236} \quad (1)$$

$$Ra = \frac{\sum_{i=2}^9 B_{i-1} \cdot P_{i-1}}{236}$$

Po wyznaczeniu reakcji podporowych przechodzimy do ustalenia sił osiowych w prętach kratownicy, poruszając się od jej lewej strony (obliczenia pośrednie opuszczono).

W podanych wyżej formułach indeksacja pokazuje, jakie węzły łączy między sobą element, w którym wyznaczono siły wewnętrzne. Na podstawie badań poprzednich [3] udowodniono, że z wysokim stopniem wiarygodności statystycznej elementy kratownicy można połączyć w kilka grup o równej wartości; w środku każdej z nich elementy można uważać za równoważne, bez względu na pewne rozrzuty ich parametrów geometrycznych i mechanicznych.

Takimi grupami są:

- elementy pasa górnego, które łączymy w jeden plik

$$V_g = (-N_{12}, -N_{23}, -N_{34}, -N_{45}) \quad (2)$$

- elementy pasa dolnego

$$H_d = (N_{17}, N_{76}) \quad (3)$$

- krzyżulce i słupki

$$K_S = (-N_{27}, -N_{37}, N_{47}, N_{46}, N_{56}) \quad (4)$$

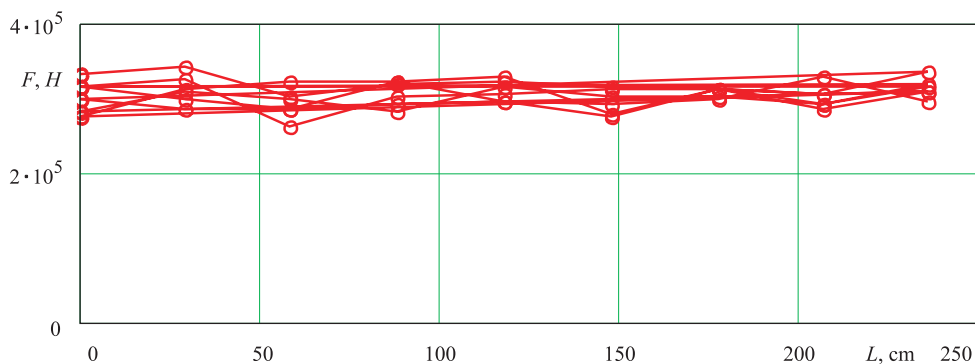
Analiza znaków przed wartościami sił jeszcze raz daje możliwość przekonania się o prawidłowości wykonanych obliczeń: elementy pasa górnego są ściskane, dolnego — rozciągane, wszystkie słupki są ściskane i tylko dwa krzyżulce, rozmieszczone w środku kratownicy — rozciągane. Przy zmianie obciążenia ta symetria zmienia się odpowiednio do jego wartości, kierunku i punktu przyłożenia.

4. Ocena niezawodności z wykorzystaniem symulacji statystycznej

Wykonano symulacje statystyczne na podstawie 500 iteracji. Wykorzystano otrzymane wcześniej dane [2–6]:

1. Obciążenia od ciężaru własnego kratownicy obliczane są jako wynik mnożenia objętości betonu (wartość zmienna, rozłożona normalnie) przez jego ciężar objętościowy (wartość rozłożona normalnie). Obciążenie przykładowe jest zewnętrznym w postaci sił skupionych w węzłach pasa górnego kratownicy. W tym samym miejscu przykładowe są obciążenia ciężarem własnym płyt dachowych żelbetonowych żebrowych o długości 1200 cm, szerokości 300 cm i wysokości 30 cm. Obciążenie od parcia wiatru nie uwzględniamy ze względu na konstrukcję dachu.
2. Ciężar pokryć dachowych (papa, izolacja termiczna i paraizolacja mają swoje rozkłady, które są nakładane) w przybliżeniu aproksymujemy rozkładem normalnym ze znanymi parametrami [6, 8].
3. Stopień zbrojenia, ciężar objętościowy i klasę stali ustalono na podstawie [1], ponieważ w rzeczywistości zbrojenie kratownicy było niedostępne. Dane o sprężeniu zbrojenia przyjmujemy z dokumentów i norm projektowania.
4. Sprawdzamy warunek, czy stosunek faktycznego obciążenia śniegiem (otrzymany na podstawie danych stacji meteorologicznych, a nie norm projektowania) do ciężaru konstrukcji nie przekracza 0,8. Ten warunek jest spełniony.

Na podstawie podanych rozważań generujemy próbki losowe obciążeń na całej długości kratownicy. Przyjęto, że brak jest korelacji pomiędzy obciążeniem śniegiem i ciężarem pokrycia dachowego na długości kratownicy. Wykres pięciu realizacji obciążenia losowego po stronie lewej kratownicy pokazano na rysunku 3.



Rys. 3. Obciążenia losowe kratownicy dachowej (po stronie lewej)

Objaśnienia w tekście

W celu obliczenia reakcji podporowych i sił osiowych w każdym z elementów kratownicy podczas procesu iteracji przy obciążeniu losowym wykonano następującą sekwencję komend MathCAD-a:

1. Kąty podczas iteracji nie zmieniają się, ponieważ odkształcenia uważamy za małe.

2. Odnaleziono zbiór reakcji podporowych odpowiadający wartościom sił zewnętrznych i podano go w postaci dwóch wektorów jednowymiarowych.
3. Po obliczeniu reakcji przechodzimy do wyznaczania wektorów sił wewnętrznych w elementach kratownicy. Każdy z elementów wektora odpowiada jednej z realizacji obciążenia zewnętrznego.

$$P12_{it} := \frac{RA_{it} - (P_{it})_1}{\sin(\alpha)} \quad (5)$$

W celu przyspieszenia obliczeń MatCAD proponuje procedurę wektoryzowania

$$P17 := \overline{(P12 \cdot \cos(\alpha))} \quad (6)$$

Niektórych wyrażeń, zawierających skomplikowane struktury zmiennych nie można zapisać w formie zwektoryzowanej. Powoduje to opóźnienia przy obliczeniach, które dla 500 iteracji są nieistotne.

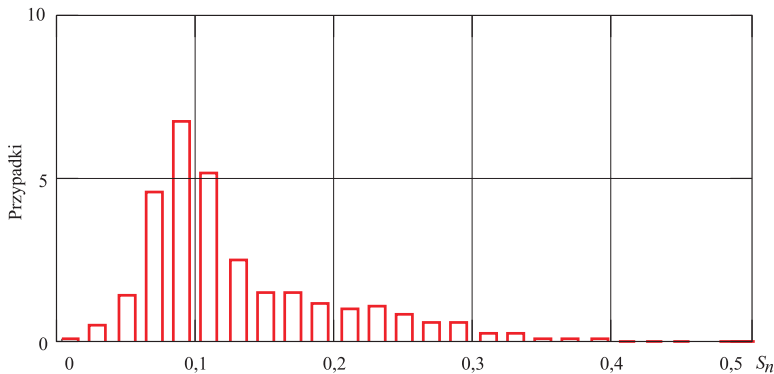
Odpowiednio dla obliczenia deterministycznego wyniki zebrane są grupami elementów. Z grupy elementów wybieramy ten, dla którego moduł siły wewnętrznej jest największy. Wskutek małej liczby iteracji i zadowalających wskaźników jakości kratownicy żadna z otrzymanych takim sposobem sił wewnętrznych nie przekracza wartości krytycznej, odnalezionej na podstawie uwzględnienia rzeczywistych (nie projektowanych) wymiarów przekroju porzecznego, realnie zmierzonych wartości wytrzymałości betony i zbrojenia kratownicy, zbadanych wcześniej [2–5].

W wyniku wykonania obliczeń otrzymano trzy grupy parametrów (3 wektory), które charakteryzują różne wskaźniki stanu krytycznego — wytrzymałość na ściskanie, rozciąganie, wyboczenie, a także pękanie itp.

Dla połączenia takich wektorów w jeden, dla dalszego oszacowania, zaproponowano następującą procedurę „zbezwymiarowania”:

1. Należy odszukać wartość różnicy pomiędzy wartością krytyczną a wartością rzeczywistą.
2. Taką procedurę należy wykonać dla wszystkich grup parametrów.
3. Ponieważ mamy charakterystyki bezwymiarowe „nieosiągnięcia” stanu krytycznego kratownicy, a konstrukcja jest statycznie wyznaczalna, łączymy wszyscy takie „zbezwymiarowane” wartości do jednego pliku.

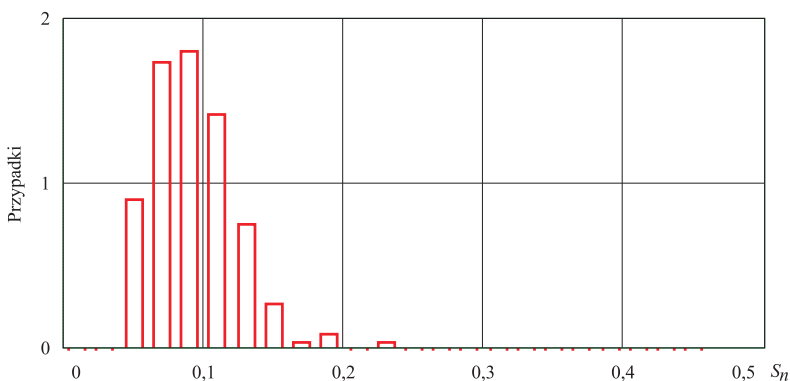
Otrzymany plik charakteryzuje ilość grup parametrów „niedoborów” do stanu krytycznego, które otrzymano na skutek obciążenia losowego kratownicy zadaniem rozkładem. Na rysunku 4 został przedstawiony histogram, który charakteryzuje stopień „nieosiągnięcia” stanu krytycznego kratownicy S_n .



Rys. 4. Histogram „nieosiągnięcia” stanu krytycznego kratownicy

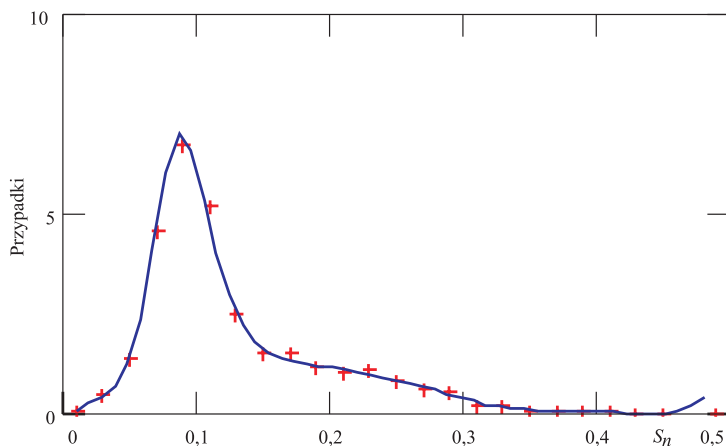
Z rysunku 4 wynika, że większa liczba elementów znajduje się w odległości 0,1 od stanu krytycznego, chociaż niektóre (jak pokazuje analiza, podstawowo słupki i krzyżulce) mogą nie „dociągać” do wartości krytycznej nawet do 0,4 nominalu. I tylko mały „ogon” rozkładu, który rozmieszczony jest po jego lewej stronie od zera, charakteryzuje możliwość przechodzenia pewnych grup przez wartość krytyczną, co oznacza zniszczenie konstrukcji. Analizując wykres, można stwierdzić, że kratownica wykonana dostatecznie efektywnie jest właściwie obciążana, to znaczy ma miejsce proces ekonomicznego wykorzystania materiału, mając zapas wytrzymałości około 10%.

W celu dokładniejszego obliczenia powierzchni pod wykresem po ujemnej stronie S_n (która charakteryzuje prawdopodobieństwo zniszczenia kratownicy) dokonuje się wyrównania metodą najmniejszych kwadratów. Zakładając, że mamy do czynienia z wykładniczo-wielomianową zależnością, w pierwszym etapie oblicza się wartości logarytmu rzędnych histogramu „nieosiągnięcia” stanu krytycznego kratownicy (rys. 5). Następnie poszukuje się współczynników aproksymacji wielomianem, w fazie początkowej — o nieokreślonym stopniu.



Rys. 5. Histogram rozkładu „nieosiągnięcia” stanu krytycznego kratownicy przedstawiony wykładniczo-wielomianową zależnością

Po wykonaniu analizy wybrano wielomian 12. stopnia, ponieważ najlepiej odzwierciedla on wymagania aproksymacji, chociaż krzywa „wygina się” do góry przy $S_n > 0,45$ (rys. 6). Jednak przedział ten nas nie interesuje, ponieważ już przy $S_n = 0,3$ prawdopodobieństwo takiej sytuacji praktycznie równe jest zero, dlatego też możemy całkować w przedziale do $S_n = 0,4$. Po lewej stronie od zera krzywa ekstrapoluje charakterystykę w obszarze wartości ujemnych, gdzie nie mamy punktów eksperymentalnych.



Rys. 6. Aproksymacja danych doświadczalnych (+) wielomianem 12. stopnia (-)

Zastępując całkę sumowaniem w punktach (metoda prostokątów), otrzymamy wartość powierzchni:

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \exp(y_i) \cdot \Delta$$

$$\Delta = \frac{\max(x) - \min(x)}{n} \tag{7}$$

$$I = 0,9994$$

Prawdopodobieństwo zabezpieczenia danej kratownicy wynosi 0,9994, a prawdopodobieństwo jej zniszczenia bez uwzględnienia zmian właściwości materiałów w czasie lub zmiany wskaźników klimatycznych i możliwego remontu dachu (co może dodać obciążenia dodatkowe za rachunek nawarstwiania materiałów hydroizolacyjnych) wynosi

$$R = 1 - I = 1 - 0,9994 = 0,0006$$

Z powyższych rozważań wynika, że na podstawie ograniczonej liczby danych doświadczalnych badań obciążenia stałego od ciężaru pokryć dachowych hal przemysłowych, wskaźników wytrzymałościowych betonu i stali, a także wymiarów geometrycznych żelbetowych kratownic dachowych można uznać niezawodność konstrukcji za dostateczną.

5. Podsumowanie

Zaproponowana metoda oceny niezawodności konstrukcji odnosi się do badań numerycznych, w których nie osiągnięto stanu krytycznego. Takie zdarzenie jest możliwe w dwóch przypadkach:

- 1) przy wykorzystaniu w MMC rzeczywistych parametrów konstrukcji, jeżeli brak możliwości wyznaczenia większej ich liczby dla poprawnego odnalezienia rozkładów i ich parametrów;
- 2) przy wysokiej niezawodności konstrukcji, kiedy wykonana liczba iteracji jest niewystarczająca, chociaż trwa ona dość długo.

W tym przypadku zaproponowano:

- wprowadzić parametry bezwymiarowe, które by charakteryzowały wartość względną „nieosiągnięcia” wartości krytycznej w każdym z elementów (a jeżeli to możliwe — w grupie elementów, co skraca obliczenia) konstrukcji przy każdej iteracji;
- zebrać wszystkie parametry bezwymiarowe (naprężenia lub odkształcenia krytyczne, bądź dopuszczalna szerokość rozwarcia rys) do jednego pliku;
- oszacować histogram tego pliku, aproksymować go właściwym rozkładem i obliczyć powierzchnie pod ekstrapolowaną ujemną częścią odciętych wykresu, która będzie prawdopodobieństwem zniszczenia.

Oprócz wyników teoretycznych, dane badania świadczą także o wysokiej jakości konstrukcji żelbetowych kratownic dachowych, które mają 10-procentowy zapas średni.

LITERATURA

- [1] Серия ПК – 01-129/78. Железобетонные предварительно напряженные сегментные фермы для покрытий зданий с пролетами 18 и 24 м. Вып.1. Материалы для проектирования, М.:1978. – 45с.
- [2] *Барашиков А.Я., Кінаш Р.І.*: Дослідження вихідних параметрів для розрахунків надійності виробів із залізобетону/Зб. наукових праць “Вопросы современного строительного материаловедения и строительства”. Львов.1998, 34–42
- [3] *Кінаш Р.І., Бурнаєв О.М., Шульчик І.В.*: Статистичні дослідження геометричних розмірів залізобетонних ферм покриття/Зб. наукових праць, вип. 2, Рівне, 1999, 102–105
- [4] *Кінаш Р.І.*: Мінливість міцнісних та деформативних властивостей бетону/Зб. наукових праць, вип. 50, Київ, 1999, 335–340
- [5] *Кінаш Р.І., Бурнаєв О.М., Ривак Т.Б.*: Статистичні характеристики міцності арматури класів А-І ... А-VII/Зб. Першої Всеукраїнської науково-технічної конференції “Наукові проблеми сучасного залізобетону”, К.: 1996, 127–129

- [6] *Kinaш P.I., Шульчик I.B.*: Статистичні дослідження постійних навантажень від власної ваги покрівель промислових будинків/Збірник наукових статей „Проблеми теорії і практики будівництва”. Том.4, Львів, 1997, 117–125
- [7] *Woliński S.*: Wymiarowanie elementów żelbetowych metodą symulacji Monte Carlo. Inżynieria i Budownictwo, nr 6, 2002
- [8] *Kinash R.*: Statistical investigation of constant loads on the structures of roof of industrial buildings. Proceedings of the 13th FIP Congress, Amsterdam, vol. 2, 1998, 829–832