

Daniel Saramak, Tadeusz Tumidajski**

ROLA I SENS APROKSYMACJI KRZYWYCH SKŁADU ZIARNOWEGO SUROWCÓW MINERALNYCH**

1. Wstęp

Rozkłady wielkości ziarn w materiale uziarnionym podlegającym procesom przeróbczym (w nadawie i produktach) są rozkładami, które wzbudzają największe zainteresowanie ze względu na to, że generują one rozkłady innych cech ziarn decydujących o przebiegu procesów rozdziału (wzbogacania). Sama zmiana rozkładu wielkości ziarn podczas rozdrabniania gra kluczową rolę w ocenie nakładów energetycznych oraz ocenie samego materiału pod względem jego podatności na różne procesy przeróbcze. Funkcje gęstości rozkładów (dystrybuanty) wielkości ziarn grają kluczową rolę w modelowaniu heurystycznym wielu procesów rozdziału. Wymienione wyżej powody zadecydowały o tym, że wzory opisujące krzywe składu ziarnowego (wzory aproksymacyjne) pojawiły się już bardzo dawno, przy czym nie ma ostrych (jednoznacznych) zasad ich wyboru i każda aproksymacja wymaga uzasadnienia właściwościami materiału, przebiegiem procesów rozdrabniania a także rodzajem analizy stosowanej do określenia udziałów klas w badanym materiale (zwłaszcza w zakresie ziarn bardzo drobnych).

2. Uwarunkowania aproksymacji rozkładów wielkości ziarn produktów

Teoretyczne podejście do określania rozkładów wielkości ziarn produktów rozdrabniania przedstawili Kołmogorow i Epstein, którzy wykazali, że przy pewnych założeniach dotyczących przebiegu długotrwałego (wielokrotnego) rozdrabniania, rozkłady wielkości ziarn produktów są rozkładami logrytmiczno-normalnymi [1, 5].

* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

** Artykuł powstał w ramach projektu badawczego nr 5T12A01725

Epstein rozważał proces rozdrabniania jako sekwencję kolejnych kruszeń i po przyjęciu założeń mówiących, że prawdopodobieństwo skruszenia ziarna o rozmiarze (wielkości) y w n -tym kruszeniu jest stałe i niezależne od y oraz od obecności innych ziarn (może być zależne od n) oraz, że uzyskiwana dystrybuanta (określana na zasadzie stosunku mas) warunkowego rozkładu wielkości ziarn produktu $F(x|y)$ jest niezależna od y w tym sensie, że udział masowy ziarn mających wielkość mniejszą od ky , (gdzie $k \in (0,1)$) powstający z jednostkowej masy ziarn o wielkości y jest niezależny od y , wykazał że po n kruszeniach dystrybuanta rozkładu wielkości x jest dystrybuantą rozkładu asymptotycznie logarytmiczno-normalnego.

Dowód tego stwierdzenia sprowadza się do wykazania, że zmienna losowa X_n oznaczająca wielkość ziarna po n -tym kruszeniu jest iloczynem $(n+1)$ niezależnych zmiennych losowych, co pozwala na zastosowanie twierdzenia Linderberga-Levy'ego [2, 3] dla logarytmu X_n , lub (w wersji asymptotycznej) centralnego twierdzenia granicznego.

Generalnie rzecz biorąc założenie Epsteina można uznać za zgodne z rzeczywistością dla materiałów jednorodnych kruszonych dostatecznie głęboko (do drobnego uziarnienia). Jeżeli mamy do czynienia z rozdrabnianiem wstępnym lub rozdrabnianiem materiałów niejednorodnych pod względem właściwości fizycznych, to osiągnięcie rozkładu logarytmiczno-normalnego wielkości ziarn produktu jest mało realne, ponieważ poszczególne klasy nadawy mają różne dystrybuanty dla produktów, a krotność kruszenia nie jest wystarczająca do osiągnięcia rozkładu asymptotycznego.

Należy także zaznaczyć, że przy niewielkich krotnościach kruszenia jest zauważalny wpływ rozkładu wyjściowego na rozkład końcowy.

Ogólną uwagą wynikającą z przedstawionych rozważań jest, że skład ziarnowy produktu zmienia się w zależności od głębokości rozdrabniania. Można wyobrazić sobie, że jeżeli mamy do czynienia z materiałem zawierającym ziarna skryształizowane, to w momencie osiągnięcia rozluźnienia tych ziarn rozkład ich wielkości może mieć charakter rozkładu normalnego lub logistycznego, ponieważ ziarn skrajnie drobnych powinno być bardzo mało (rozdrobnienie kryształów) i nie powinny występować ziarna duże (nierozdrobnione „sklejki” kryształów).

Warto zwrócić uwagę na jeszcze jedno ogólne zagadnienie, które ma istotny wpływ na dobór wzorów aproksymujących krzywe składu ziarnowego surowców mineralnych. Zgodnie z naturą tych minerałów proponowana dystrybuanta do opisu danych empirycznych powinna uzyskiwać wartość jeden dla ziarna maksymalnego (d_{max}) i dlatego powinny być stosowane tzw. rozkłady cenzurowane przez tę wielkość.

Znanymi modyfikacjami wzorów Rosina-Ramlera-Bennetta są wzory wykorzystujące ułamek $\frac{x}{x_{max} - x}$ mylone ze wzorami dla rozkładów uciętych. Rozkłady ucięte są definiowane na drodze czysto teoretycznej i postacię ich funkcji gęstości czy dystrybuant są uzyskiwane analitycznie poprzez przekształcenia wzorów opisujących rozkład wyjściowy [8].

Omówione wyżej trzy typy rozkładów zostaną przeanalizowane w następujących częściach artykułu w oparciu o dane opisujące wyniki długotrwałego rozdrabniania wybranych surowców skalnych.

3. Rozkłady wielkości ziarn produktów będące przedmiotem aproksymacji

3.1. Charakterystyka rozkład logistycznego

Krzywa logistyczna opisuje zmianę danego zjawiska w czasie. Za pomocą krzywej logistycznej opisywane są zjawiska, które charakteryzują się powolnym wzrostem badanej cechy w początkowym etapie, potem przez pewien czas następuje bardzo dynamiczny przyrost badanej cechy, który potem zaczyna słabnąć aż do stabilizacji w końcowym etapie. W postaci analitycznej równanie dystrybuanty dane jest wzorem (rys. 1)

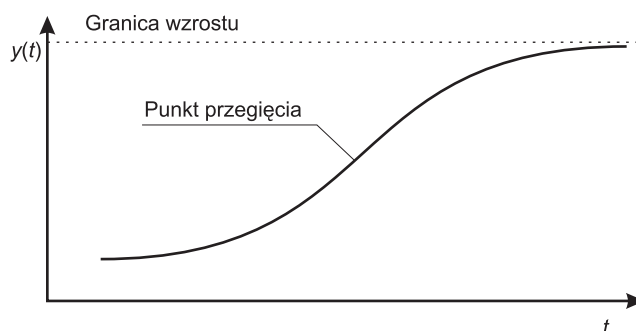
$$y(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}} \quad (1)$$

gdzie:

- a — wyznacza asymptotę poziomą funkcji $y(t)$;
- b — odpowiada za przesunięcie krzywej logistycznej wzdłuż osi odciętej;
- c — wyraża przyśpieszenie wzrostu funkcji;
- k — wyraża opóźnienie wzrostu funkcji.

Związek pomiędzy parametrami a , c oraz k jest następujący

$$c = k \cdot a.$$



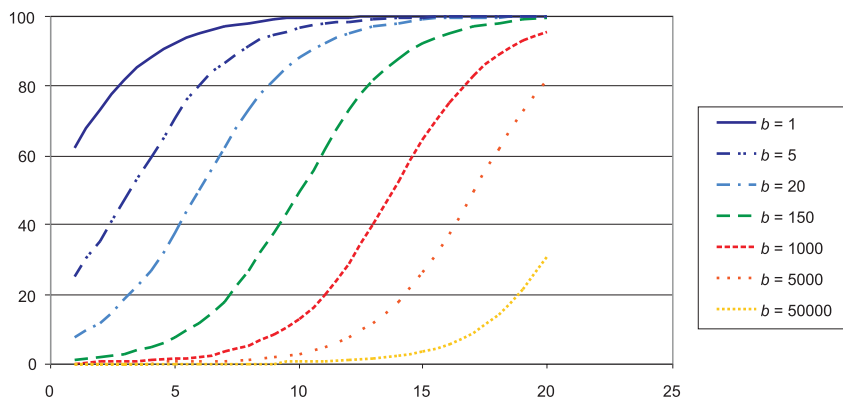
Rys. 1. Wykres funkcji $y(t)$ opisanej wzorem (1)

Dystrybuanta rozkładu logistycznego może być używana w opisie krzywych składu ziarnowego produktów kruszenia dla zmiennej losowej wielkości ziarna D_0 .

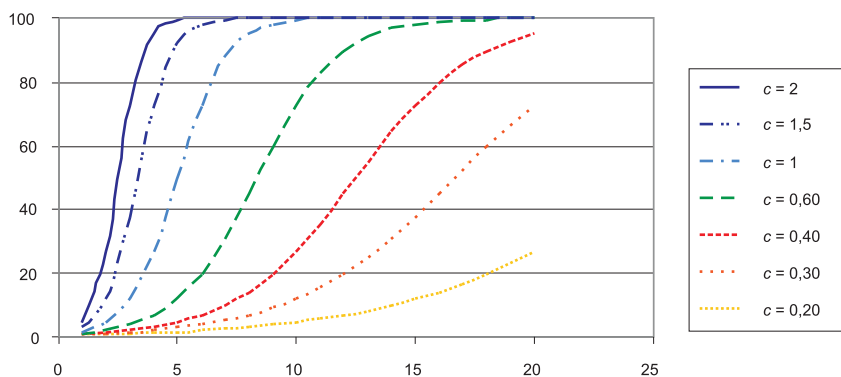
Jej postać będzie wtedy następująca

$$\Phi(d) = \frac{100}{1 + be^{-cd}} \quad (2)$$

W zależności od wartości przyjmowanych przez parametry b oraz c dystrybuanta rozkładu logistycznego przyjmuje różne kształty. Rysunek 2 przedstawia różne przebiegi tej dystrybuanty w zależności od różnych wartości parametru b , natomiast rysunek 3 — różne przebiegi tej dystrybuanty dla różnych wartości parametru c . Wraz ze wzrostem wartości parametru b następuje przesunięcie wartości medialnej w prawo a ze wzrostem wartości parametru c zmniejsza się rozrzut wielkości ziaren wokół wartości średniej. Wielkość prezentowanych kształtów jest pośrednim dowodem możliwości zastosowania dystrybuanty rozkładu logistycznego do opisu krzywych składu ziarnowego.



Rys. 2. Kształty dystrybuant rozkładu logistycznego przy różnych wartościach parametru b



Rys. 3. Kształty dystrybuant rozkładu logistycznego przy różnych wartościach parametru c

Teoretyczny rozkład logistyczny opisuje zmienność badanej cechy (np. wielkości ziarna) w przedziale $(0, +\infty)$ i dlatego celowe jest jego ograniczenie (cenzurowanie) do wartości d_{\max} .

Dystrybuanta takiego rozkładu logistycznego będzie miała postać

$$\Phi(d) = \frac{100}{1 + be^{-c\left(\frac{d}{d_{\max} - d}\right)}} \quad (3)$$

Aproksymację rozkładem logistycznym przeprowadzamy po zlinearyzowaniu wzoru (3)

$$\ln\left(\frac{100}{\Phi(d)} - 1\right) = -cd + \ln(b) \quad (4)$$

i wyznaczeniu parametrów prostej $y = Au + B$, gdzie

$$y = \ln\left(\frac{100}{\Phi(d)} - 1\right)$$

$$u = \left(\frac{d}{d_{\max} - d}\right) \quad (5)$$

$$A = -c$$

$$B = \ln(b)$$

Obliczenia muszą być prowadzone przy arbitralnie przyjętym d_{\max} , które jest większe od rozmiaru największego oczka użytych sit.

3.2. Charakterystyka rozkładu logarytmiczno-normalnego

Jeżeli przyjmiemy, że zmienna losowa $\ln D$ ma rozkład logarytmiczno-normalny, to funkcję gęstości tego rozkładu będzie opisywać wzór

$$g(d) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln d - m)^2}{2\sigma^2}} \quad (6)$$

gdzie σ jest odchyleniem standardowym a m wartością średnią $\ln D$. Wartością przeciętną $E(D)$ zmiennej losowej D oraz jej odchylenie standardowe $V(D)$ wyznaczamy ze wzorów:

$$E(D) = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (7)$$

$$V(D) = m\sqrt{\exp \sigma^2 - 1}$$

Standaryzacja zmiennej losowej $\ln D$ doprowadza dowolny rozkład logarytmiczno-normalny do rozkładu $N(0,1)$ (tablicowego) a to tworzy podstawę do wyznaczenia wartości m i σ metodą najmniejszych kwadratów, po przyjęciu, że uzyskane wartości

$$u_i = \Phi_0^{-1} \left(\frac{\ln d_i - m}{\sigma} \right)$$

($\Phi_0(u)$ — tablicowa dystrybuanta rozkładu $N(0,1)$) oraz $\ln d_i$ powinny spełniać równanie prostej

$$u_i = \frac{\ln x_i - m}{\sigma}$$

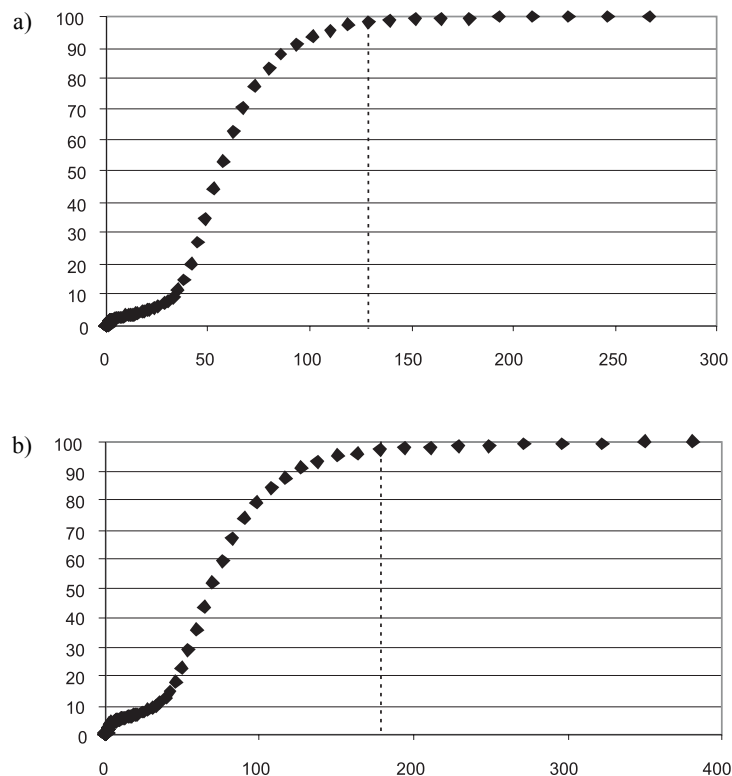
4. Próby aproksymacji krzywych składu ziarnowego proponowanymi dystrybuantami rozkładów

Wyniki analiz składu ziarnowego związane są z określonym materiałem uziarnionym oraz metodą analizy, co decyduje o przebiegu krzywych składu oraz o zakresie zmienności wielkości ziarn. Wiele zadań badawczych opartych jest na analizach składu ziarnowego wąskich klas zmienności wielkości ziarn (określonych i otrzymywanych za pomocą sit), które ulegają tzw. rozmyciu (poszerzeniu zakresu) w zależności od zastosowanej metody pomiarowej. Każda metoda pomiarowa dostrzega ziarna w sposób dla siebie specyficzny, co ma wpływ na określenie wielkości maksymalnej ziarna (d_{\max}), zmianę przebiegu krzywej składu a także sposób prezentacji danych (np. przyrost ilości i zmiany szerokości klas). Okazuje się, że te różnice wymuszają zmiany w zasadach stosowania technik aproksymacji i doboru liczby punktów uwzględnianych w obliczeniach.

Większość dotychczas prowadzonych badań dotyczących aproksymacji krzywych składu ziarnowego była prowadzona dla wyników analiz sitowych przy zachowaniu zasady, że tzw. sit drobnych było używanych więcej niż sit o większych oczkach i ostatnim sitem było sito na którym pozostawało względnie niewiele materiału. Przy analizach instrumentalnych obserwuje się znaczny przyrost liczby klas największych o minimalnych wychodach, które stanowią wyraźne „obciążenie” pozostałej liczby punktów. Każda para punktów leżących na dystrybuancie ma taką samą wagę w obliczeniach przy stosowanej tradycyjnie metodzie najmniejszych kwadratów. Metoda najmniejszych kwadratów cechuje się dużą wrażliwością na tzw. błędy grube (nadmierne) lub „punkty dźwigniowe” (odstające od pozostałych) a także długie „ogony” danych (rys. 4).

W celu wyeliminowania lub zminimalizowania wpływu takich grup danych na uzyskane wyniki można zastosować inne metody estymacji, odporne na nie. Jedną z nich są procedury medianowe [4, 6]. Można też pominąć błędne punkty empiryczne, o ile jest możliwość ich zlokalizowania.

Dla przykładowych krzywych składu ziarnowego wykonanych dla diabazu (klasa $0,04\div 0,063$ mm) oraz dla magnezytu (klasa $0,063\div 0,071$ mm) (rys. 4) można zauważyć, że dla ostatnich kilku klas wychody są równe zero lub osiągają wartość rzędu dziesiątych lub nawet setnych części procenta. Punkty te wyraźnie odstają od reszty danych i zniekształcają otrzymane charakterystyki.



Rys. 4. Dystrybuanty empiryczne rozkładu wielkości ziarn uzyskane laserowym miernikiem wielkości cząstek (IPS): a) dla diabazu (klasa $0,04\div 0,063$ mm); b) dla magnezytu (klasa $0,063\div 0,071$ mm)

Początkowo dokonano aproksymacji dla kompletnych empirycznych krzywych składu ziarnowego rozkładem logistycznym. Uzyskane wyniki nie były jednak zadowalające, ponieważ błędy aproksymacji (z wyjątkiem jednej próbki, dla której błąd wynosił 1,12%) mieściły się w przedziale $4,9\div 11,2\%$ (tab. 1). Tak słabe dopasowanie teoretycznych rozkładów może być spowodowane występowaniem w empirycznych krzywych składu ziarnowego błędów nadmiernych, które w całej procedurze aproksymacyjnej pełnią rolę punktów dźwigniowych, dostosowując kształt krzywej do siebie. Na rysunku 4 punkty dźwigniowe znajdują się po prawej stronie pionowej linii. Punkty te opisują bardzo małe przyrosty wychodów

w swoich klasach, które łącznie nie przekraczają 2%. Ponieważ więc takie punkty nie wnoszą istotnych informacji można „odciąć” tych kilka lub kilkanaście punktów (wszystkich klas w analizie jest w zależności od materiału 95÷125) i dla otrzymanej w ten sposób nowych krzywych składu ziarnowego przeprowadzić aproksymacje. Aproksymacja ta dla nazwana została aproksymacją z pominięciem. Taka procedura znacznie poprawiła wyniki aproksymacji, wartości błędów aproksymacji poza dwoma wyjątkami nie przekroczyły 8% (tab. 1).

Możliwą metodą aproksymacji jest ucięcie rozkładu na zadanym poziomie i przyjęcie, że w miejscu ucięcia rozkład ujmuje 100% materiału (dzielimy wychody rzeczywiste przez sumaryczny wychód w punkcie ucięcia). Wyniki wszystkich trzech rodzajów aproksymacji zostały przedstawione w tabeli 1, a dodatkowo dla aproksymacji z ucięciem został podany wychód w punkcie, w którym dokonano ucięcia.

TABELA 1

Wyniki trzech rodzajów aproksymacji rozkładem logistycznym

Kamień	Błąd aproksymacji, %			
	bez ucięcia	z pominięciem	z ucięciem	poziom ucięcia
Diabaz (0,04÷0,063 mm)	9,198	2,893	2,117	98,149
Magnezyt (0,063÷0,071 mm)	10,946	4,566	3,401	97,73
Diabaz (0,032÷0,04 mm)	8,538	4,788	4,086	98,14
Baryt (0,315÷0,4 mm)	11,226	8,035	6,893	97,44
Diabaz (poniżej 0,16 mm)	1,120	0,961	0,794	98,60
Porfir	7,532	7,257	6,246	97,79
Magnezyt (poniżej 0,16 mm)	9,288	9,288	8,891	98,47
Wapień Czatkowice	4,914	4,814	4,663	98,23
Wapień	7,783	7,812	7,868	98,34

W wyniku aproksymacji z pominięciem, szczególnie w wąskich klasach ziarnowych, rozkład logistyczny daje bardzo dobre rezultaty (dodatkowo obcięcie daje najwyższą dokładność aproksymacji). Podsumowując, ucięcie daje najlepsze wyniki aproksymacji, nieco gorsze efekty daje pominięcie nadmiernej liczby punktów „ogona”, natomiast najgorzej wypadła mechanicznie wykonana aproksymacja na całym zakresie danych empirycznych.

Dla rozkładu log-normalnego dokładność aproksymacji zwiększa się ze wzrostem czasu mielenia (zgodnie z twierdzeniem Kołmogorowa i Epsteina [1, 5]) (tab. 2).

TABELA 2

Wyniki aproksymacji rozkładem log-normalnym

Rodzaj kamienia	Czas mielenia	Błąd aproksymacji
Diabaz	30	9,71
	50	5,85
	90	4,09
	130	4,95
	150	4,24
Dolomit	30	7,84
	50	6,42
	90	5,76
	130	5,82
	150	5,19
Porfir	30	10,39
	50	9,94
	90	5,03
	130	5,41
	150	4,65
Wapień Czatkowice	30	11,02
	50	10,28
	90	7,84
	130	7,05
	150	6,74

5. Zasady wyznaczania powierzchni właściwej mieszaniny ziarn na podstawie krzywych składu ziarnowego w oparciu o masę ziarn

Przedstawione w poprzednim rozdziale wzory aproksymujące krzywe składu ziarnowego mogą być podstawą wielu dalszych rozważań. W tym artykule zwrócimy uwagę na możliwość wyznaczenia na ich podstawie powierzchni właściwej proszków, których skład ziarnowy opisywany jest rozkładami logarytmiczno-normalnym lub logistycznym. W literaturze opisywany jest szeroko i stosowany sposób wyznaczania tej powierzchni na podstawie rozkładu Rosina-Ramlera [7].

Jeżeli znany jest wagowy wychód elementarnej klasy dw , to liczba ziaren sześciennych w tej klasie wynosi

$$dN = \frac{dw}{x^3 \rho} \quad (8)$$

gdzie:

ρ — gęstość ziarna,
 x — wymiar (długość krawędzi sześcianu)

a powierzchnia wszystkich ziaren tej klasy wynosi

$$ds = dN \cdot 6x^2 = \frac{dw}{x^3 \rho} 6x^2 = \frac{6dw}{x\rho} \quad (9)$$

Jeśli przyjmiemy, że wszystkie ziarna mają formę kuli to mamy

$$ds = \frac{dw}{\frac{\pi x^3}{6} \rho} \pi x^2 = \frac{6}{x\rho} dw \quad (10)$$

gdzie x — średnica kuli.

Rzeczywista forma ziarna mineralnego różni się od sześcianu i kuli i dlatego powierzchnia obliczona jest mniejsza od rzeczywistej (mnożnik wyrównujący z przedziału 1,3÷2,6).

Dla mieszaniny ziarn charakteryzowanej wagową funkcją gęstości $f(x) = \frac{dw}{dx}$ mamy

$$\frac{dw}{dx} = f(x) \quad (11)$$

$$dw = f(x)dx$$

i dla klasy $\left(x - \frac{dx}{2}, x + \frac{dx}{2}\right)$ (x – w mikrometrach, s oraz S w cm^2)

otrzymujemy

$$ds = \frac{f(x)dx}{\left(\frac{x}{10^4}\right)^3 \rho} 6 \left(\frac{x}{10^4}\right)^2 = \frac{6}{\rho} 10^4 \frac{f(x)dx}{x} \quad (12)$$

i stąd

$$S = \frac{6 \cdot 10^4}{\rho} \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x} dx \right) \quad (13)$$

Dla rozkładów logarytmiczno-normalnego oraz logistycznego całki przedstawione we wzorze (13) mają następujące postacie:

— rozkład logarytmiczno-normalny

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (14)$$

— rozkład logistyczny

$$f(x) = \frac{cbe^{-cx}}{(1+be^{-cx})^2}, \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} \times \frac{cbe^{-cx}}{(1+be^{-cx})^2} dx \quad (15)$$

Całki opisane wzorami (14) i (15) są nieefektywne i rozwiązać je można jedynie poprzez rozwinięcie w szeregi potęgowe. W obu przypadkach zastosujemy rozwinięcia w szereg Taylora dla wartości początkowej $x = 1 \mu\text{m}$ i będzie ono stosowane dla funkcji:

$$y_1 = e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}}$$

oraz

$$y_2 = \frac{c \cdot b \cdot e^{-cx}}{(1 + b \cdot e^{-cx})^2}$$

Pierwsze kilka pochodnych dla funkcji y_1 ma postać:

$$y_1' = \frac{e^{-\frac{(-m+\ln x)^2}{2\sigma^2}} \cdot \ln(-m + \ln x)}{\sigma^2 \cdot x}$$

$$y_1'' = \frac{e^{-\frac{(-m+\ln x)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2 \cdot x^2} + \frac{e^{-\frac{(-m+\ln x)^2}{2\sigma^2}} \cdot (-m + \ln x)}{\sigma^2 \cdot x^2} + \frac{e^{-\frac{(-m+\ln x)^2}{2\sigma^2}} \cdot (-m + \ln x)^2}{\sigma^4 \cdot x^2}$$

$$y_1''' = \frac{3e^{-\frac{(-m+\ln x)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2 \cdot x^3} + \frac{3e^{-\frac{(-m+\ln x)^2}{2\sigma^2}}(-m+\ln x)}{\sigma^4 \cdot x^3} - \frac{2e^{-\frac{(-m+\ln x)^2}{2\sigma^2}}(-m+\ln x)}{\sigma^2 \cdot x^3} +$$

$$- \frac{3e^{-\frac{(-m+\ln x)^2}{2\sigma^2}}(-m+\ln x)^2}{\sigma^4 \cdot x^3} - \frac{e^{-\frac{(-m+\ln x)^2}{2\sigma^2}}(-m+\ln x)^3}{\sigma^6 \cdot x^3}$$

Natomiast dla y_2 :

$$y_2' = \frac{2b^2 \cdot c^2 \cdot e^{-2c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^3} - \frac{b \cdot c^2 \cdot e^{-c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^2}$$

$$y_2'' = \frac{6b^3 \cdot c^3 \cdot e^{-3c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^4} - \frac{6b^2 \cdot c^3 \cdot e^{-2c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^3} + \frac{b \cdot c^3 \cdot e^{-c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^2}$$

$$y_2''' = \frac{24b^4 \cdot c^4 \cdot e^{-4c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^5} - \frac{36b^3 \cdot c^4 \cdot e^{-3c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^4} + \frac{14b^2 \cdot c^4 \cdot e^{-2c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^3} - \frac{b \cdot c^4 \cdot e^{-c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^2}$$

$$y_2^{IV} = \frac{120b^5 \cdot c^5 \cdot e^{-5c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^6} - \frac{240b^4 \cdot c^5 \cdot e^{-4c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^5} + \frac{150b^3 \cdot c^5 \cdot e^{-3c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^4} - \frac{30b^2 \cdot c^5 \cdot e^{-2c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^3} +$$

$$+ \frac{b \cdot c^5 \cdot e^{-c \cdot x}}{(1+b \cdot e^{-c \cdot x})^2}$$

Dla y_1 przyjmując wartość dla x równą 1 mikrometr oraz parametry rozkładu uzyskane przykładowo z aproksymacji dla diabazu, czas mielenia 90 minut (tab. 2) wynoszące odpowiednio: $m = 2,803$ oraz $\sigma = 1,351$ otrzymujemy wartości przedstawione w tabeli 3.

TABELA 3

Kolejne współczynniki w szeregu Taylora dla aproksymacji rozkładem logarymiczno-normalnym

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{y_1^{(n)}(1)}{n!}$	0,178474	0,01597	-0,0244	0,01368	-0,00652	0,00287	-0,001109	0,000288

Dla y_2 przyjmujemy wartość x także równą 1 mikrometr natomiast parametry rozkładu przyjmujemy dla aproksymacji diabazu w wąskiej klasie poniżej 16 mikrometrów (tab. 1) wynoszące: $b = 752,890$; $c = 0,039$.

W wyniku tego otrzymujemy wartości kolejnych pochodnych przedstawione w tabeli 4.

TABELA 4

Kolejne współczynniki w szeregu Taylora dla aproksymacji rozkładem logistycznym

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{j_2^{(n)}(1)}{n!}$	$\frac{2,0889}{10^6}$	$\frac{7,9473}{10^8}$	$\frac{3,0271}{10^9}$	$\frac{1,1497}{10^{10}}$	$\frac{4,2836}{10^{12}}$	$\frac{2,1778}{10^{16}}$	$\frac{4,7727}{10^{15}}$	$\frac{9,8161}{10^{17}}$

Jak łatwo zauważyć współczynniki z tabel 3 i 4 są szybko zbieżne do zera (zwłaszcza dla rozkładu logistycznego) i wyznaczanie powierzchni właściwej na ich podstawie może być względnie łatwe.

6. Podsumowanie

Zaprezentowane w artykule zagadnienia dotyczące sposobów aproksymacji krzywych składu ziarnowego uzyskiwanych różnymi metodami pomiarowymi pojawiają się praktycznie po raz pierwszy i wymagają pogłębionej analizy matematycznej i rachunkowej. Proponowane wzory na wyznaczanie powierzchni właściwej zbiorów ziarn także wymagają weryfikacji oraz porównań z innymi sposobami wyznaczania tej powierzchni a także analizy wpływu dokładności aproksymacji na uzyskiwane wyniki. Problemy te będą przedmiotem dalszych prac autorów.

LITERATURA

- [1] *Epstein B.*: Logarithmico-normal distributions in breakage of solids. *Ind. Eng. Chem.*, 40, 1948, 2289–2291
- [2] *Fisz M.*: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. Warszawa, PWN 1969
- [3] *Hahn G.J., Shapiro S.S.*: *Statistical models in engineering*. New York J. Willey and Sons Inc. 1994
- [4] *Karr C.L., Weck B., Massart D.L., Vankeerberghen P.*: Least median squares curve fitting using a genetic algorithm, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier Science Ltd, 1995, vol. 8, No. 2, 177–189
- [5] *Kolmogorow A.N.*: O logarificzieski normalnom zakonie raspriedielienija razmierow czastic pri drobleniji, *dokl. AN SSSR*, 31, 1941, 99–101
- [6] *Rousseeuw P., Leroy A.*: *Robus regression and outlier detection*. New York, John Wiley & Sons 1987
- [7] *Andrejew C.E., Towarow W.W., Pierow W.A.*: *Zakonomiornosti izmielczienija i uscislenieje charakteristik granulometrichieskogo sostawa*, Moskwa, 1959
- [8] *Tumidajski T.*: *Zastosowanie metod statystycznych w analizie procesów przeróbki surowców mineralnych*. Katowice, Śląskie Wydawnictwo Techniczne 1993