

*Andrzej Kwinta\**

## DOBÓR WIELKOŚCI POLA ELEMENTARNEGO DO NUMERYCZNEGO OBLICZANIA OBNIŻEŃ

---

### 1. Wstęp

Wraz z pojawieniem się modeli prognozowania opartych na funkcji wpływów do użycia zostały wprowadzone pojęcia funkcji elementarnej, wpływów elementarnych, pola elementarnego. Są to hipotetyczne wielkości służące do obliczania wskaźników deformacji na bazie przyjętego modelu teoretycznego. Wielkości te są ze sobą wzajemnie powiązane. Funkcja elementarna jest to funkcja wpływów (pod znakiem całki). Wpływy elementarne to wpływy od niewielkiego pola eksploatacyjnego odpowiadające deformacjom wyznaczonym dla funkcji elementarnych. Pole elementarne to część pola eksploatacyjnego, dla którego można zastosować funkcję wpływów i jednocześnie jest to pole, dla którego wzory całkowite można zastąpić wzorami sumacyjnymi.

Przejście od całkowania do sumowania stanowi pewne przybliżone rozwiązanie. Ponieważ nie jest to rozwiązanie ściśle, następuje pewne zniekształcenie (błąd), którego wartość maleje wraz ze zmniejszaniem się pola przyjmowanego za elementarne. Z drugiej strony efektywność obliczeń wzrasta wraz ze wzrostem wymiarów pola elementarnego. Dlatego należy przyjąć pewien kompromis w doborze wielkości tego pola, natomiast nie istnieje jednoznaczne kryterium obiektywne, które pozwalałoby na ustalanie jego wielkości. Podział pola eksploatacyjnego na elementy złożowe (elementarne) stosuje Hejmanowski do czasoprzestrzennego opisu deformacji [1]. Rozważania na temat wielkości pola elementarnego prowadził również Sroka [4]. Analizę podziału pola eksploatacyjnego na przebieg procesu czasoprzestrzennego prowadził Piwowarski [3].

W niniejszej pracy przedstawiona zostanie analiza wpływu przyjętych parametrów pola elementarnego na wartości wyznaczanych obniżeń. Obliczenia prowadzone będą dla obniżeń wyznaczanych zgodnie z teorią Knothego dla stanów asymptotycznych [2]. Podstawowymi elementami, które zostaną zbadane, będą rozmiary pola elementarnego oraz jego kształt. Parametry te będą standaryzowane do promienia zasięgu wpływów głównych.

---

\* Katedra Geodezji, Akademia Rolnicza, Kraków

Przeprowadzone w niniejszej pracy rozważania nie uwzględniają czynnika czasu, który w rzeczywistych przypadkach odgrywa istotną rolę. Oddziaływanie danego elementu eksploatacji na powierzchnię terenu rozciągnięte jest w czasie na przestrzeni kilku lat. W takim przypadku praktycznie niemożliwe jest ścisłe rozdzielanie wpływów od poszczególnych elementów eksploatacyjnych. Z tego powodu przeprowadzone analizy mają charakter teoretyczny. Wszystkie obliczenia zostały zrealizowane na bazie specjalnie przygotowanych dla tego celu programów komputerowych.

## 2. Analiza wielkości elementarnego pola

Jak już stwierdzono, nie ma obiektywnego kryterium determinującego możliwość przyjęcia danego pola eksploatacyjnego jako pola elementarnego. Dla potrzeb niniejszej pracy przyjęto wprowadzenie wielkości względnej różnicy pomiędzy wartościami obniżen z funkcji wyznaczonej w sposób ścisły dla danego pola i funkcji elementarnej (1). Różnica ta jest standaryzowana do wartości maksymalnego obniżenia i została nazwana względnym błędem elementarnym obniżen:

$$\delta_w(x_i, y_i) = \frac{W(x_i, y_i) - W_e(x_i, y_i)}{W_{\max}} 100\% \quad (1)$$

gdzie:

- $\delta_w(x_i, y_i)$  — względny błąd elementarny w punkcie  $S_i$ ,
- $W(x_i, y_i)$  — obniżenie w punkcie  $S_i$  wyznaczone zgodnie z teorią Knothego,
- $W_e(x_i, y_i)$  — obniżenie w punkcie  $S_i$  wyznaczone z funkcji elementarnej,
- $W_{\max}$  — obniżenie maksymalne zgodnie z teorią Knothego  $W_{\max} = ag$ .

Zgodnie z teorią Knothego obniżenie dowolnego punktu  $S_i$  leżącego w zasięgu oddziaływania podziemnej eksploatacji górniczej  $E$  można określić następująco:

$$W(x_i, y_i) = \frac{ag}{r^2} \int_{-0,5b}^{0,5b} \int_{-0,5c}^{0,5c} \exp \left[ -\pi \frac{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2}{r^2} \right] d\xi d\eta \quad (2)$$

gdzie:

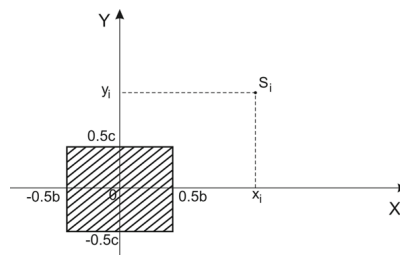
- $a$  — parametr zależny od sposobu kierowania stropem,
- $g$  — grubość eksploatacji,
- $b, c$  — krawędzie pola eksploatacji,
- $x_i, y_i$  — współrzędne punktu obliczeniowego,
- $r$  — promień zasięgu wpływów głównych teorii Knothego,

natomiast dla funkcji elementarnej mamy:

$$W_e(x_i, y_i) = \frac{agp}{r^2} \exp\left[-\pi \frac{x_i^2 + y_i^2}{r^2}\right] \quad (3)$$

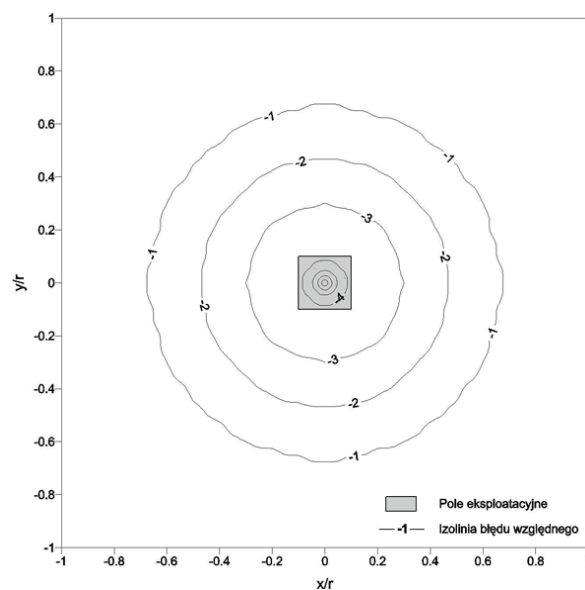
gdzie  $p = b \cdot c$  jest to powierzchnia eksploatacji, a pozostałe oznaczenia jak powyżej.

Schematycznie rozmieszczenie punktu obliczeniowego względem pola eksploatacyjnego przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat rozmieszczenia pola eksploatacyjnego i punktu obliczeniowego

Zgodnie z przedstawionym schematem wykonano obliczenie dla zbioru punktów obliczeniowych rozmieszczonych w regularnej siatce kwadratów o oczku  $0,01 r$ . W celu uproszczenia analizy przyjęto do obliczeń pole eksploatacyjne w kształcie kwadratu boku  $0,2 r$ .

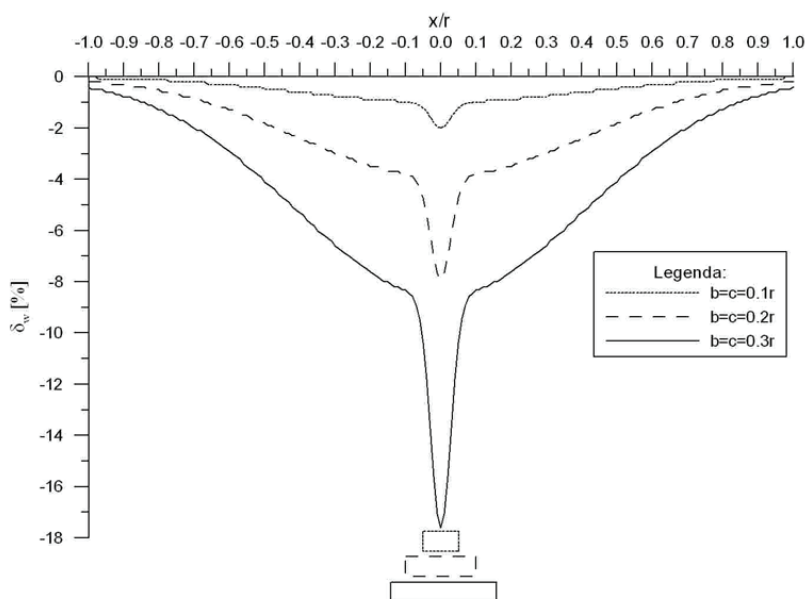


Rys. 2. Rozkład wartości względnego błędzi elementarnego ponad polem eksploatacyjnym

Przedstawione na rysunku 2 wyniki obliczeń wskazują, że największe wartości błędzi względnego rejestrowane są nad centrum przyjętego pola eksploatacyjnego. W całym zakre-

W obliczeniowym wartości obniżenia wyliczane z funkcji elementarnej są większe od wartości obniżenia uzyskanych zgodnie z teorią Knothe'go.

Dla porównania przeprowadzono również obliczenia wzdłuż profilu przechodzącego przez środek pola, a wyniki zestawiono na wykresie (rys. 3).



Rys. 3. Rozkład względnego błędu elementarnego dla profilu obliczeniowego

Uzyskane wyniki wskazują, że istotny wzrost wartości błędów następuje dla punktów zlokalizowanych bezpośrednio nad polem eksploatacyjnym.

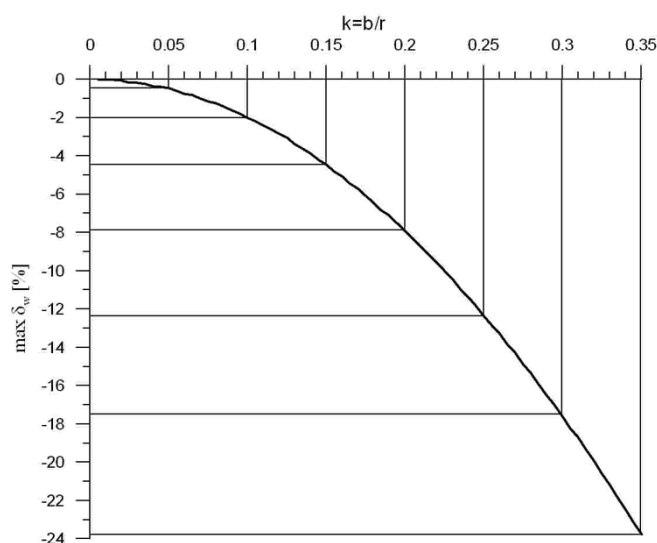
W następnym etapie obliczeń wyznaczano obniżenia dla punktu leżącego nad centrum kwadratowego pola eksploatacyjnego. Przekształcając zależność (1) przy uwzględnieniu (2) i (3) oraz miejsca występowania błędów maksymalnych, a także standaryzacji pola eksploatacyjnego i współrzędnych do promienia zasięgu wpływów uzyskujemy:

$$\max \delta_w(k) = \left[ \int_{-0,5k}^{0,5k} \int_{-0,5k}^{0,5k} \exp\left(-\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{r^2}\right) d\xi d\eta - k^2 \right] 100\% \quad (4)$$

gdzie  $k = \frac{b}{r} = \frac{c}{r}$ .

Wyniki obliczeń graficznie zestawiono na rysunku 4.

Analiza wykresu przedstawionego na rysunku 4 pozwala stwierdzić, że wraz z powiększaniem elementarnego pola eksploatacyjnego szybko wzrasta wartość maksymalna względnego błędu elementarnego dla obniżenia. Gdyby przyjąć jako wartość graniczną błąd na poziomie 5% maksymalnego obniżenia dla dużego pola eksploatacyjnego, to kryterium takie spełniałyby pola eksploatacyjne o długości boku mniejszej od  $0,16 r$ .



**Rys. 4.** Rozkład wartości maksymalnych względnego błędu elementarnego w zależności od wielkości elementarnego pola eksploatacyjnego

### 3. Analiza kształtu elementarnego pola

W dotychczasowych analizach obliczenia prowadzono przy założeniu, że pole eksploatacyjne jest w kształcie kwadratu. Obecnie sprawdzeniu będzie podlegało to, jaki wpływ na wartość względnego błędu elementarnego (4) będzie miała zmiana kształtu pola eksploatacyjnego. W tym celu dla pól eksploatacyjnych o ustalonej powierzchni zmieniano stosunek krawędzi, w zakresie od 1:10 do 10:1. Obliczenia wykonywano dla punktów rozmieszczonych na linii przechodzącej przez centrum pola eksploatacyjnego.

W tabeli 1 zestawiono wartości maksymalnego błędu dla pola w kształcie kwadratu i wyniki dla najbardziej korzystnego kształtu prostokąta o takim samym polu powierzchni. Uzyskane wyniki wskazują, że dla pola o boku  $0,1 r$  zmiana kształtu konturu eksploatacyjnego nie ma znaczenia. Wraz ze wzrostem powierzchni eksploatacji rośnie rozbieżność pomiędzy wynikami uzyskanymi dla kwadratu i dla prostokąta, przy czym wartość względnego błędu elementarnego jest każdorazowo największa dla pola w kształcie kwadratu.

TABELA 1

**Zmiana wartości błędu ze względu na zmianę kształtu pola**

Bok kwadratu	Powierzchnia / $r^2$	$\max \delta_w$ [%]	
		dla kwadratu	minimalne
0,10 $r$	0,0100	-2,00	-2,00
0,15 $r$	0,0225	-4,45	-4,35
0,20 $r$	0,0400	-7,90	-7,40
0,25 $r$	0,0625	-12,35	-10,65
0,30 $r$	0,0900	-17,60	-13,90

**4. Podsumowanie**

Funkcja elementarna i pole elementarne są podstawowymi pojęciami związanymi z prognozowaniem deformacji na bazie teorii geometryczno-całkowych. Wielkość elementarna jest tworem czysto hipotetycznym i naprawdę niespotykanym w rzeczywistości. Pewną namiastką jest stosowanie pojęcia małego pola eksploatacyjnego, które powoduje wpływy odpowiadające funkcji elementarnej. Należy pamiętać, że jest to tylko pewne przybliżenie, natomiast jednoznacznie musi być określona wielkość takiego pola eksploatacyjnego. Rozważania dotyczące wielkości pola powodującego elementarne oddziaływanie ma bardzo duże znaczenie teoretyczne dla metod obliczeniowych bazujących na elementach eksploatacyjnych. Przeprowadzone w niniejszej pracy rozważania pozwalają stwierdzić, że dla teorii Knothe'go jako pole wywołujące elementarne oddziaływanie można przyjąć obiekt o powierzchni 0,01  $r^2$ . W takim wypadku jego kształt nie ma znaczenia, a uzyskane rozbieżności od metody ścisłej nie przekroczą 2% maksymalnego obniżenia wywołanego tą eksploatacją. Należy pamiętać, że wyznaczona maksymalna wartość rozbieżności jest czysto teoretyczna i odpowiada najbardziej niekorzystnemu przypadkowi oddziaływania pojedynczego elementu eksploatacji. W rzeczywistości uzyskiwana wartość rozbieżności jest dużo mniejsza ze względu na sumowanie się wpływów, w różny sposób rozmieszczonych względem punktu obliczeniowego.

## LITERATURA

- [1] *Hejmanowski R.*: Czasoprzestrzenny opis deformacji górotworu wywołanych filarowo-komorową eksploatacją złoża pokładowego. UWND AGH, seria Rozprawy i Monografie nr 31, Kraków 2004
- [2] *Knothe S.*: Prognozowanie wpływów eksploatacji górniczej. Wyd. Śląsk, Katowice 1984
- [3] *Piwowski W.*: Prognozowanie przemieszczeń pionowych powstałych w procesie rozwijającej się eksploatacji górniczej w oparciu o liniowy model matematyczny zjawiska. AGH, Kraków 1977 (rozprawa doktorska, niepublikowana)
- [4] *Sroka A.*: Przybliżona metoda określania przemieszczeń punktów górotworu i powierzchni dla małych, regularnych pól eksploatacyjnych. ZN AGH, Geodezja, z.46, 1976