

*Irena Bagińska\*, Ryszard Jerzy Izbicki\**

## NIEJEDNORODNOŚĆ OŚRODKA GRUNTOWEGO W KINEMATYCZNEJ ANALIZIE STATECZNOŚCI ZBOCZY

---

### 1. Wstęp

Kinematyczna analiza stateczności zboczy jest grupą metod oszacowujących z góry rozwiązanie ściśle postawionego problemu na mocy jednego z twierdzeń stanu granicznego. Stan graniczny jest pojęciem umownym. Określa pewien stan naprężenia i obciążenia w danym ośrodku, przy którym dochodzi do nieograniczonego plastycznego płynięcia lub niekontrolowanego zniszczenia. Hipotetyczna funkcja opisująca warunek stanu granicznego w przestrzeni naprężeń, na mocy postulatu Druckera, musi dostarczać pewną powierzchnię wypukłą. Dla ośrodków gruntowych najczęściej stosowanym kryterium spełniającym powyższe warunki jest warunek Coulomba. Wszystkie stany naprężenia mieszczące się wewnątrz powierzchni stanu granicznego są dopuszczalne i nie powodują zniszczenia ośrodka gruntowego; jedynie naprężenia równe naprężeniom granicznym zgodnie z teorią plastyczności są przyczyną wystąpienia nieograniczonych deformacji plastycznych, czyli zniszczenia ośrodka gruntowego. Przyjęcie w stanie granicznym idealnie plastycznego modelu ciała oraz stowarzyszonego prawa płynięcia, które można traktować jako prawo fizyczne materiału, umożliwia wyprowadzenie ekstremalnych twierdzeń teorii nośności granicznej.

Pierwsze twierdzenie (statyczne) mówi, iż poszukiwaną wielkość oszacujemy od dołu, jeśli do analizy przyjmujemy statycznie dopuszczalne pole naprężeń; czyli analizowany stan naprężeń będzie pochodził z obszaru bezpiecznego, znajdującego się wewnątrz powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń.

Drugie twierdzenie (kinematyczne) pozwala nam poszukiwać oszacowania górnego poszukiwanej wielkości za pomocą przyjętego pola prędkości. Pole to musi spełniać warunki brzegowe zadania oraz być kinematycznie dopuszczalne. Ponadto konieczne jest zapewnienie dodatniej wartości mocy obciążeń zewnętrznych na obciążonym brzegu oraz zerowej mocy reakcji na nieruchomym obszarze utwierdzenia.

---

\* Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska, Wrocław

Kiedy oszacowanie górne (kinematyczne) oraz dolne (statyczne) dostarcza identyczne rozwiązanie, można mówić o rozwiązaniu ścisłym (pełnym) poszukiwanej wielkości.

W niniejszym artykule skupiono się na przedstawieniu sposobów uwzględniania niejednorodności ośrodka gruntowego w kinematycznych metodach oceny stateczności, oszacowujących poszukiwane wielkości od góry.

## 2. Sposoby uwzględniania niejednorodności ośrodka gruntowego

Niejednorodność ośrodka gruntowego można uwzględnić w analizie kinematycznej na dwa sposoby. Różnią się one między sobą sposobem dobierania kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia. Konsekwencją bowiem zastosowania stowarzyszonego prawa płynięcia oraz zapewnienia kinematycznej dopuszczalności mechanizmu zniszczenia jest odchylenie wektora skoku prędkości od każdej linii nieciągłości prędkości o kąt dylatacji równy kątowi tarcia wewnętrznego.

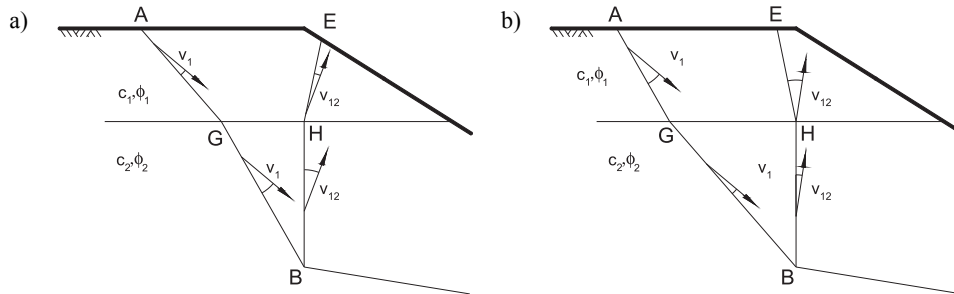
Po pierwsze możliwa jest budowa mechanizmu zniszczenia niezależnie od budowy geologicznej niejednorodnego ośrodka gruntowego. Jednak w tym przypadku konieczne jest uśrednianie parametrów wytrzymałościowych gruntu wzdłuż linii nieciągłości prędkości.

Uśrednienie parametrów wykonane za pomocą średnich ważonych zostało wykorzystane w pracach Topolnickiego i Tejhmana [9] oraz Sołtysa [7]. W rozwiązaniach tych wagę każdego składnika stanowiła długość linii nieciągłości prędkości zawierająca się w poszczególnych warstwach ośrodka gruntowego. Jak wykazywali autorzy, takie uogólnienie obarcza rozwiązanie pewnym błędem, lecz jest on, zdaniem autorów, niewielki.

Odminnym sposobem uwzględnienia uwarstwionego ośrodka gruntowego jest przyjęcie takiego mechanizmu zniszczenia, który w swej budowie uwzględniałby budowę geologiczną podłoża. Dzięki temu na każdej linii nieciągłości prędkości można jednoznacznie zdefiniować parametry  $c$  i  $\phi$ . W niektórych rozwiązaniach linie rozgraniczające różne ośrodki również zostają uznane za linie nieciągłości prędkości. W tych przypadkach zachodzi jednak kłopot jednoznacznego zdefiniowania parametrów wytrzymałościowych związanych z tymi liniami nieciągłości prędkości.

Kombinację powyższych sposobów budowy mechanizmu zniszczenia zastosował Kim [6] do oceny stateczności zboczy uwarstwionych, Forkiewicz [3] do kinematycznej oceny nośności uwarstwionego gruntu oraz Stilger-Szydło [8] do kinematycznej oceny stateczności zboczy z uwzględnieniem ciśnienia spływowego wody gruntowej.

Ciekawą propozycję uwzględnienia w analizie kinematycznej uwarstwienia ośrodka gruntowego podali Karal [5] oraz Izbicki [4]. Zaproponowali oni przyjęcie łamanej linii nieciągłości prędkości rozgraniczającej sąsiednie elementy mechanizmu zniszczenia. Trasę łamanej linii determinują parametry poszczególnych warstw (por. rys. 1). Takie podejście zapewnia na całej długości łamanej linii nieciągłości prędkości odchylenie wektora skoku prędkości od linii o kąt tarcia wewnętrznego poszczególnej warstwy, bez podziału mechanizmu na drobniejsze elementy (obszar ABE jest pojedynczym blokiem).



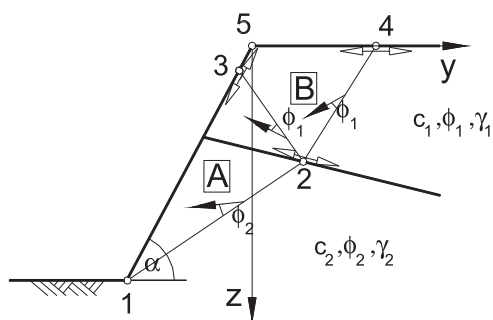
Rys. 1. Mechanizm zniszczenia w przypadku ośrodka uwarstwowionego:  
a) dla  $\phi_1 < \phi_2$ , b) dla  $\phi_1 > \phi_2$

### 3. Numeryczna analiza stateczności niejednorodnego zbocza uogólnioną metodą elementów kinematycznych

Uogólnioną metodę elementów kinematycznych (por. [2]) można stosować do oceny stateczności zboczy zbudowanych z ośrodka niejednorodnego. Niejednorodność może dotyczyć przewarstwienia jedną lub kilkoma warstwami gruntu o zmiennych parametrach. Zmienność parametrów uwzględniana jest zarówno na etapie budowy kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia, jak i przy zapisie równania bilansu mocy, w stanie granicznym bowiem suma pracy sił masowych oraz zewnętrznych przyrównana zostaje dysypacji powstałej na wszystkich liniach nieciągłości prędkości pomiędzy sztywnymi elementami (1).

$$\sum d_{ij} \cdot c \cdot v_{i,j} \cdot \cos \phi = \sum Q \cdot v_i^Q + \sum X_i \cdot v_i^X \quad (1)$$

Przyjmijmy skarpe zbudowaną z dwóch ośrodków o parametrach  $c_1 = 20 \text{ kPa}$ ,  $\phi_1 = 10^\circ$ ,  $\gamma_1 = 20 \text{ kN/m}^3$  oraz  $c_2 = 10 \text{ kPa}$ ,  $\phi_2 = 5^\circ$ ,  $\gamma_2 = 19 \text{ kN/m}^3$  przedstawioną na rysunku 2.



Rys. 2. Dwoelementowy mechanizm zniszczenia skarpy niejednorodnej

Dla poniższej skarpy można zaproponować mechanizm dwuelementowy, który w swej budowie uwzględni istnienie niejednorodności gruntowej już na etapie doboru elementów. Linia rozgraniczająca dwa ośrodki nie jest traktowana jako linia nieciągłości prędkości. Element B składa się z dwóch ośrodków gruntowych, co zostaje uwzględnione przy obliczaniu siły ciężkości elementu.

W mechanizmie przedstawionym na rysunku 2 część współrzędnych węzłów siatki dana jest warunkami brzegowymi poprzez zadanie konturu skarpy oraz równania linii rozgraniczającej dwa ośrodki względem przyjętego układu odniesienia. Na tej podstawie określone zostają możliwe stopnie swobody przemieszczania się węzłów siatki w trakcie optymalizacji mechanizmu. W tym przypadku możliwe są trzy stopnie swobody (pokazane strzałkami „pustymi”) i tyle właśnie zmiennych będzie miała funkcja celu określona na podstawie równania bilansu mocy (1).

Na rysunku 2 wektory prędkości poszczególnych bloków pokazano strzałkami „pełnymi”. Wartości ich, wyrażone w funkcji poszukiwanych współrzędnych węzłów siatki, można wyznaczyć z układu równań kinematycznych. Układ ten powstaje po zapisaniu, odpowiednio dla każdej z linii nieciągłości, prędkości równania przedstawiającego rzut wektora skoku prędkości na kierunek prostopadły do tej linii (por. [2]). W zapisie należy pamiętać, iż każda linia nieciągłości jest ściśle związana z konkretnymi wartościami parametrów  $\phi$  i  $c$ . Dla powyższego przykładu układ równań kinematycznych przyjmie następującą postać (2).

$$\begin{bmatrix} l_{12} - \frac{\tan \phi_2}{\tan \phi_2 \cdot l_{12} + n_{12}} & n_{12} & 0 & 0 \\ -l_{32} + \frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_1 \cdot l_{32} - n_{32}} & -n_{32} & l_{32} - \frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_1 \cdot l_{32} - n_{32}} & n_{32} \\ 0 & 0 & l_{24} - \frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_1 \cdot l_{24} + n_{24}} & n_{24} \\ 0 & 0 & l_{45} & n_{45} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_A^y \\ v_A^z \\ v_B^y \\ v_B^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

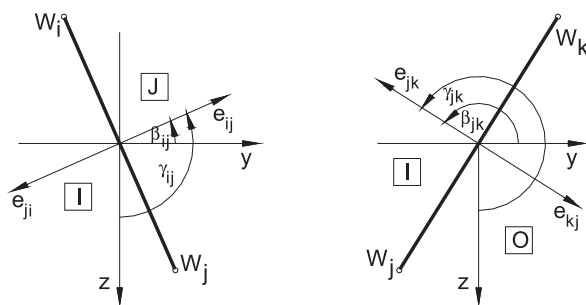
W równaniach (2)  $l_{ij}$  oraz  $n_{ij}$  określają odpowiednio cosinusy kierunkowe wektorów normalnych do poszczególnych linii nieciągłości prędkości względem przyjętego układu odniesienia, co pokazano na rysunku 3 i przedstawiono w równaniach (3) i (4).

$$\cos \beta_{ij} = \frac{z_{ij}}{d_{ij}} = l_{ij} = -l_{ji} \quad (3)$$

$$\cos \gamma_{ij} = -\frac{y_{ij}}{d_{ij}} = n_{ij} = -n_{ji} \quad (4)$$

Ostateczne położenie poszczególnych węzłów określone zostaje podczas optymalizacji mechanizmu przeprowadzanej w trakcie poszukiwania minimum globalnego funkcji celu

określającej poszukiwaną wielkość. Jak już wspomniano, funkcja celu wyznaczona została z równania bilansu mocy (1).

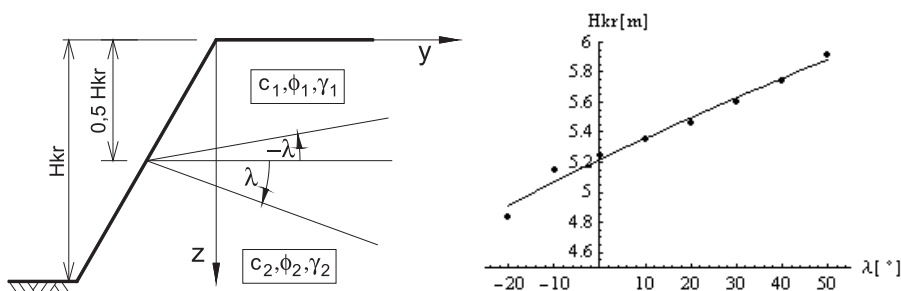


**Rys. 3.** Linie nieciągłości prędkości wraz z kątami skierowanymi jednostkowych wektorów normalnych

W rozpatrywanym przykładzie określano wysokość krytyczną niejednorodnego zbocza o kącie nachylenia równym  $\alpha = 60^\circ$  przy zmiennym kącie nachylenia linii rozgraniczającej dwa ośrodki gruntowe  $\lambda$  (por. rys. 4). Poszukiwano minimum globalnego funkcji opisującej wysokość krytyczną zbocza (5) za pomocą metody optymalizacyjnej Nelder-Meada. W trakcie optymalizacji na funkcję celu nakładano ograniczenia gwarantujące otrzymanie kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia (por. [1]). Liczba zmiennych równa była liczbie przyjętych stopni swobody (por. rys. 2).

$$H_{kr} = f(y_2, z_3, y_4) \quad (5)$$

W rozwiązaniu otrzymano zmieniającą się wartość wysokości krytycznej uzależnioną od nachylenia linii rozgraniczającej dwa ośrodki gruntowe. Wyniki przedstawiono na wykresie zamieszczonym na rysunku 4.

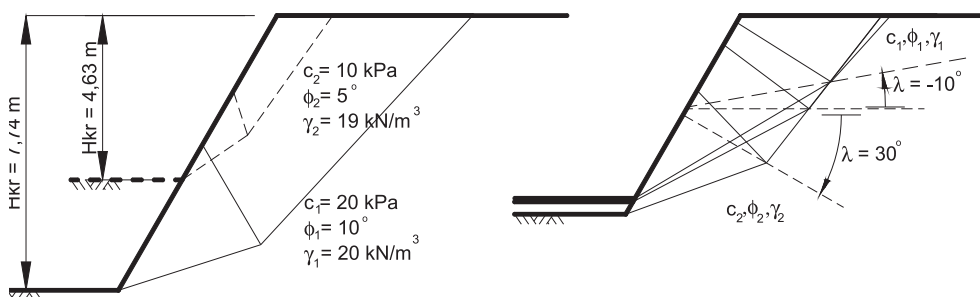


**Rys. 4.** Schemat skarpy oraz wykres zmiany wysokości krytycznej skarpy w zależności od kąta nachylenia linii rozgraniczającej dwa ośrodki gruntowe

Otrzymane wartości wysokości krytycznej wpisały się pomiędzy oszacowania otrzymane dla skarp jednorodnych zbudowanych z poszczególnych ośrodków gruntowych (por. rys. 5).

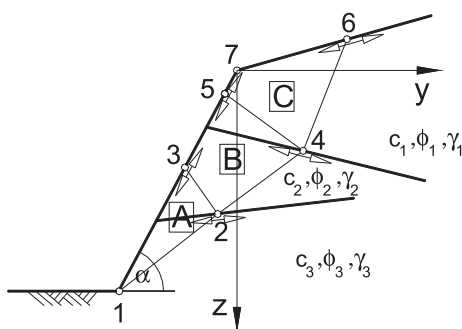
W przypadku kiedy linia rozgraniczająca przyjmowała położenie insekwentne w stosunku do zbocza ( $\lambda > 0$ ), wartość wysokości krytycznej rosła. W odwrotnym przypadku, dla  $\lambda < 0$ , wartość wysokości krytycznej szybko malała, zbliżając się do rozwiązania równego oszacowaniu uzyskanemu dla skarpy jednorodnej zbudowanej z gruntu umieszczonego w podstawie skarpy.

Każdorazowe obliczenie wysokości krytycznej dostarczało współrzędne węzłów siatki, dla których wartość ta została osiągnięta. Dzięki tym danym możliwe było graficzne przedstawienie zoptymalizowanych mechanizmów zniszczenia, co zilustrowano na rysunku 5.



Rys. 5. Zoptymalizowane mechanizmy zniszczenia dla skarp jednorodnych oraz niejednorodnych

W przypadku skarp zbudowanych z większej liczby przewarstwień należy zastosować mechanizmy o większej liczbie elementów. Linie rozgraniczające warstwy mogą być zadane kilkoma prostymi (rys. 6).



Rys. 6. Przykład trzelementowego mechanizmu zniszczenia skarpy niejednorodnej

## 4. Wnioski

Uogólniona metoda elementów kinematycznych może służyć do oceny stateczności zboczy uwarstwionych. Zaproponowany sposób budowania kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia uwzględnia istnienie niejednorodności geologicznych zboczy zarówno przy doborze elementów bryły odłamu, jak i w równaniu bilansu mocy. Gwarantuje to konsekwentne i jednoznaczne powiązanie parametrów wytrzymałościowych z poszczególnymi liniami nieciągłości prędkości.

Tak przyjęty algorytm obliczeniowy może posłużyć do górnego oszacowania wysokości krytycznej zboczy niejednorodnych. W rozwiązaniu równocześnie z wartością oszacowania otrzymany zostaje zoptymalizowany mechanizm zniszczenia, na podstawie którego możliwe jest określenie powierzchni poślizgu bryły odłamu.

### LITERATURA

- [1] *Bagińska I., Izbicki R.J.*: Optymalizacja kształtu bryły odłamu w uogólnionej Metodzie Elementów Kinematycznych. II Ogólnopolska Konferencja Metody komputerowe w geotechnice i geologii inżynierskiej, Poznań–Rydzyń, 23–25 października 2007 (w druku)
- [2] *Bagińska I.*: Wykorzystanie uogólnionej Metody Elementów Kinematycznych do oceny stateczności zboczy. Gliwice, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo, z. 104, 2005, 51–58
- [3] *Florkiewicz A.*: Nośność graniczna podłoża o cechach skokowo zmiennych. Poznań, Politechnika Poznańska, Rozprawy nr 224, 1990
- [4] *Izbicki R.J.*: Zastosowanie metod nośności granicznej w analizie stateczności zboczy, Arch. Hydr., t. XXVIII, z. 1, 1981, 132–144
- [5] *Karal K.*: Energy Method For Soil Stability Analyses. J. Geotech. Eng. Div., vol. 103, No 5, 1977, 431–445
- [6] *Kim J., Salgado R., Lee J.*: Stability Analysis of Complex Soil Slopes using Limit Analysis. J. Geotech. and Geoenviron. Eng., vol. 128, No 7, 2002, 546–557
- [7] *Sołtys G.*: Analiza płaskich i przestrzennych zagadnień geotechniki Metodą Elementów Kinematycznych. Rozprawa doktorska, Gdańsk 2000
- [8] *Stilger-Szydło E.*: Stany graniczne skarp i zboczy. Rozwiązania kompletne. Wrocław, Wydawnictwo PWR 1993
- [9] *Topolnicki M., Tejchman A.*: Zastosowanie metody kinematycznej do sprawdzania stateczności klifów morskich. Inżynieria Morska i Geotechnika, nr 5, 1994, 244–247