Górnictwo i Geoinżynieria • Rok 32 • Zeszyt 2 • 2008

*Jan Gaszyński**

WPŁYW TEMPERATURY NA KONSOLIDACJĘ OŚRODKA POROWATEGO NASYCONEGO CIECZĄ

1. Wstęp

Potrzeba rozwiązywania zagadnień związanych z budownictwem oraz inżynierią i ochroną środowiska sprawia, że analiza stanów naprężenia i odkształcenia w gruncie pozostaje ciągle jednym z najczęściej podejmowanych tematów, zarówno w badaniach eksperymentalnych, jak i rozważaniach teoretycznych. Zakres tej tematyki jest bardzo obszerny. Wynika to, z faktu pojawiania się problemów geotechnicznych zarówno w każdym procesie inwestycyjnym (posadowienie budowli), jak i zadaniach związanych z wykorzystaniem środowiska gruntowego przy magazynowaniu i transporcie odpadów oraz energii. Do grupy tych zagadnień należą problemy przechowywania i transportu energii cieplnej w ośrodku gruntowym.

Ruch ciepła w gruncie powoduje zmiany jego temperatury, mające wpływ na stan naprężeń. Rezultatem tego są odkształcenia mogące mieć wpływ na obiekty posadowione na gruncie. Te zagadnienia są przedmiotem dalszej części pracy. Rozważany jest problem deformacji warstwy gruntu (jako porowatego ośrodka nasyconego cieczą), wywołanej obciążeniem zewnętrznym i zmianami temperatury. Do rozwiązania zadania przyjęto model termokonsolidacji [1, 2, 6, 7], bazujący na sprzężeniu pól naprężeń w szkielecie, ciśnienia wody w porach oraz pola temperatury. W szczególności dokonano oceny wpływu temperatury na osiadanie warstwy gruntu w jednoosiowym stanie odkształcenia. Przedstawione rozwiązanie jest uogólnieniem wyników uzyskanych w pracy [5].

2. Równania termokonsolidacji

Rozważana jest konsolidująca warstwa gruntu o miąższości h, spoczywająca na nieodkształcalnym podłożu. Proces konsolidacji wywołuje równomiernie rozłożone obciążenie q_0.

* Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska, Kraków

Wpływ na ten proces ma także pole temperatury, która w chwili początkowej ma określony rozkład. Przyjmuje się, że w szkielecie gruntowym i cieczy określone jest pole temperatury, mające wpływ na stany naprężeń, a tym samym na proces konsolidacji. Zakłada się, że pola naprężeń w szkielecie, ciśnień w cieczy i temperatury są ze sobą sprzężone, a sposób tego sprzężenia opisuje model termokonsolidacji [7].

Stan procesu opisują następujące funkcje:

w — przemieszczenie w kierunku z, prostopadłym do brzegu (osiadanie),

σ_z — naprężenie w szkielecie,

σ — ciśnienie cieczy w porach,

ϑ — temperatura wywołana procesem konsolidacji $\left(\vartheta = T - T_0\right)$,

T — temperatura bezwzględna w chwili t,

T_0 — w chwili początkowej t_0.

W jednoosiowym stanie deformacji równania tego modelu mają postać:

$$
\begin{aligned}
&Ew,_{zz} + \frac{H}{R}\sigma,_z - \frac{E}{T_0} b_3 \vartheta,_z = 0 \\
&\sigma,_{zz} = \frac{1}{kR}\dot{\sigma} - \frac{H}{kR}\dot{w},_z + \frac{E}{kRT_0} b_2 \dot{\vartheta} \\
&\vartheta,_{zz} = \left(b_0 + \frac{E}{R} b_2^2\right)\frac{E}{\lambda_T T_0}\dot{\vartheta} + \frac{E}{R\lambda_T} b_2 \dot{\sigma} + \frac{E}{\lambda_T} b_3 \dot{w},_z
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Związki fizyczne zapiszemy w postaci:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_z = Ew,_z + \frac{Q}{R}\sigma - \left(b_1 - \frac{Q}{R} b_2\right)\frac{E}{T_0}\vartheta \\
&\sigma = Qw,_z + R\theta - b_2 \frac{E}{T_0}\vartheta
\end{aligned}
\tag{2}
$$

W równaniach (1) i (2) występują parametry materiałowe ośrodka:

A, N, Q, R — stałe Biota,

k — współczynnik przepuszczalności,

λ_T — współczynnik przewodnictwa cieplnego,

$\alpha_T^s, \alpha_T^c, \alpha_T^{sc}$ — współczynniki liniowej rozszerzalności cieplnej szkieletu, cieczy oraz wpływu rozszerzalności cieplnej szkieletu na wydatek cieczy i odwrotnie,

ρ, c_v — gęstość właściwa i ciepło właściwe ośrodka.

W artykule przyjęto oznaczenia:

$$
\begin{aligned}
&H = Q + R,\\
&M = A - \frac{Q^2}{R},\\
&E = 2N + M,\\
&K = A + \frac{2}{3}N,\\
&B = \frac{E \cdot R^2}{E \cdot R + H^2},\\
&b_0 = \rho \cdot c_v \frac{T_0}{E},\\
&b_1 = \left(3K\alpha_T^s + Q\alpha_T^{sc}\right)\frac{T_0}{E},\\
&b_2 = \left(Q\alpha_T^{sc} + R\alpha_T^c\right)\frac{T_0}{E},\\
&b_3 = b_1 - \frac{Q}{R}b_2,\\
&b_4 = \frac{E}{R}b_2 - \frac{H}{R}b_3,\\
&b_5 = b_0 + \frac{E}{R}b_2^2 + b_3^2.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Rozwiązane zostaną zadania:

— Konsolidacja warstwy ośrodka porowatego pod zadanym obciążeniem brzegu (podstawowe zadanie dla oceny odkształceń podłoża gruntowego);
— Ocena wpływu temperatury na proces konsolidacji, w tym na stan naprężenia (zadanie ważne dla analizy zagadnień geotermalnych).

Warunki początkowe

Uwzględniając właściwości układu równań (1), warunki początkowe zapisano w postaci [4, 5, 7]:

$$Ew,_{zz}^{o} + \frac{H}{R}\sigma,_{z}^{o} - \frac{E}{T_0} b_3 \vartheta,_{z}^{o} = 0,$$

$$\sigma^{o} - Hw,_{z}^{o} + \frac{E}{T_0} b_2 \vartheta^{o} = 0, \; t = t_o, \tag{4}$$

$$\left(b_0 + \frac{E}{R} b_2^2\right)\frac{1}{T_0}\vartheta^{o} + \frac{1}{R} b_2 \sigma^{o} + b_3 w,_{z}^{o} = 0.$$

Warunki brzegowe

Przyjmując poprzednio przyjęte założenia o obciążeniu warstwy oraz fakt, że górny brzeg warstwy jest przepuszczalny, dolny nieprzepuszczalny i podobnie dla temperatury, zapiszemy warunki brzegowe dla obydwu zadań w postaci:

Dla $z = 0$:

$$\sigma_z = -q_o H(t),$$

$$\sigma = 0, \tag{5}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 L(t)$$

Dla $z = h$:

$$w = 0,$$

$$\sigma,_z = 0, \tag{6}$$

$$\vartheta,_z = 0$$

Tak sformułowane zagadnienie początkowo-brzegowe stanowi podstawę do konstrukcji rozwiązania zadania.

3. Rozwiązanie zadania

Do rozwiązania zadania wykorzystamy transformację Laplace'a [3].

Po wykonaniu tej transformacji na układzie równań (1) oraz warunkach początkowych (4) i warunkach brzegowych (5, 6), a także scałkowaniu równania (1_1) otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
&E\bar{w},_z + \frac{H}{R}\bar{\sigma} - \frac{E}{T_0}b_3\bar{\vartheta} = -q_0\bar{H}(s) \\
&\bar{\sigma},_{zz} = \frac{s}{kR}\bar{\sigma} - \frac{sH}{kR}\bar{w},_z + \frac{sE}{kRT_0}b_2\bar{\vartheta} \\
&\bar{\vartheta},_{zz} = \left(b_0 + \frac{E}{R}b_2^2\right)\frac{sE}{\lambda_T T_0}\bar{\vartheta} + \frac{sE}{R\lambda_T}b_2\bar{\sigma} + \frac{sE}{\lambda_T}b_3\bar{w},_z
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Tutaj nadkreśleniem oznaczono transformaty poszukiwanych funkcji. Wyeliminowanie transformaty przemieszczenia, wyliczonej z równania (7_1), z równań przepływu (7_2) i przewodnictwa (7_3) daje po przekształceniach:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\sigma},_{zz} - \frac{s}{kB}\bar{\sigma} - \frac{s}{kT_0}b_4\bar{\vartheta} = \frac{1}{k}\frac{H}{ER}q_0 s\bar{H}(s) \\
&\bar{\vartheta},_{zz} - \frac{sE}{\lambda_T T_0}b_5\bar{\vartheta} - \frac{s}{\lambda_T}b_4\bar{\sigma} = -\frac{1}{\lambda_T}b_3 q_0 s\bar{H}(s)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Jest to sprzężony układ dwóch niejednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych. Rozwiązanie równań (8) znajdujemy jako sumę całek: szczególnej dla równania niejednorodnego i ogólnej równania jednorodnego:

Całka szczególna układu niejednorodnego spełnia układ równań:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\sigma}_{sz},_{zz} - \frac{s}{kB}\bar{\sigma}_{sz} - \frac{s}{kT_0}b_4\bar{\vartheta}_{sz} = \frac{1}{k}\frac{H}{ER}q_0 s\bar{H}(s) \\
&\bar{\vartheta}_{sz},_{zz} - \frac{sE}{\lambda_T T_0}b_5\bar{\vartheta}_{sz} - \frac{s}{\lambda_T}b_4\bar{\sigma}_{sz} = -\frac{1}{\lambda_T}b_3 q_0 s\bar{H}(s)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Po rozwiązaniu układu (9) mamy:

$$
\bar{\sigma}_{sz} = \frac{b_3 b_4 + \frac{H}{R}b_5}{b_4^2 - \frac{E}{B}b_5}q_0\bar{H}(s), \qquad \bar{\vartheta}_{sz} = -\frac{1}{B}\frac{b_3 + \frac{BH}{ER}b_4}{b_4^2 - \frac{E}{B}b_5}T_0 q_0\bar{H}(s)\,, \tag{10}
$$

Całka ogólna spełnia układ równań:

$$\bar{\sigma}_{og},_{zz} - \frac{s}{kB}\bar{\sigma}_{og} - \frac{s}{kT_0}b_4\bar{\vartheta}_{og} = 0$$

$$\bar{\vartheta}_{og},_{zz} - \frac{sE}{\lambda_T T_0}b_5\bar{\vartheta}_{og} - \frac{s}{\lambda_T}b_4\bar{\sigma}_{og} = 0 \tag{11}$$

Rozwiązanie tego układu zapiszemy w postaci:

$$\bar{\sigma}_{og} = \bar{G},_{zz} - \frac{sE}{\lambda_T T_0}b_5\bar{G}, \qquad \bar{\vartheta}_{og} = \frac{s}{\lambda_T}b_4\bar{G} \tag{12}$$

gdzie $\bar{G}(z,s)$ jest funkcją spełniającą tożsamościowo równanie (11_2) oraz równanie:

$$\left[d_z^4 - \left(\frac{s}{kB} + \frac{sE}{\lambda_T T_0}b_5\right)d_z^2 - \left(b_4^2 - \frac{E}{B}b_5\right)\frac{s^2}{k\lambda_T T_0}\right]\bar{G}(z,s) = 0 \tag{13}$$

Pierwiastki równania charakterystycznego dla (13) określają związki:

$$r_1^2 = \frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T}}\rho_1^2,$$

$$r_2^2 = \frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T}}\rho_2^2 \tag{14}$$

tutaj oznaczono:

$$\rho_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{B}\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}} + Eb_5\sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}} + \mu\right]$$

$$\rho_2^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{B}\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}} + Eb_5\sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}} - \mu\right] \tag{15}$$

$$\mu^2 = \left(\frac{1}{B}\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}} - Eb_5\sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}}\right)^2 + 4b_4^2$$

Funkcja $\overline{G}(z,s)$ dana jest związkiem:

$$\overline{G} = c_1 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right) + c_2 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right) + \\ + c_3 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right) + c_4 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right) \tag{16}$$

Stąd całki ogólne poszukiwanych funkcji $\overline{\sigma}_{og}$ i $\overline{\vartheta}_{og}$:

$$\overline{\sigma}_{og} = \left(\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}\rho_1^2 - \frac{s}{\lambda_T T_0}Eb_5\right)\left[c_1 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right) + c_2 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right)\right] + \\ + \left(\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}\rho_2^2 - \frac{s}{\lambda_T T_0}Eb_5\right)\left[c_3 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right) + c_4 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right)\right] \tag{17}$$

$$\overline{\vartheta}_{og} = \frac{s}{\lambda_T} b_4 \left[c_1 sh\left(\sqrt{\frac{s}{k\lambda_T T_0}}\rho_1 z\right) + c_2 ch\left(\sqrt{\frac{s}{k\lambda_T T_0}}\rho_1 z\right) + \\ + c_3 sh\left(\sqrt{\frac{s}{k\lambda_T T_0}}\rho_2 z\right) + c_4 ch\left(\sqrt{\frac{s}{k\lambda_T T_0}}\rho_2 z\right)\right] \tag{18}$$

Dalej zajmiemy się wyznaczeniem transformaty przemieszczenia brzegu warstwy konsolidującej. Podstawiając otrzymane rezultaty (12, 17, 18) do równania (7_1) i całkując względem zmiennej z, otrzymamy po przekształceniach:

$$\overline{w} = \sqrt{\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}}\frac{1}{\rho_1}\left(-\frac{H}{ER}\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}\rho_1^2 + \frac{s}{\lambda_T T_0}\left(\frac{H}{R}b_5 + b_3 b_4\right)\right)\cdot\left(c_1 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right) + c_2 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 z\right)\right) + \\ + \sqrt{\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}}\frac{1}{\rho_2}\left(-\frac{H}{ER}\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}\rho_2^2 + \frac{s}{\lambda_T T_0}\left(\frac{H}{R}b_5 + b_3 b_4\right)\right)\cdot\left(c_3 ch\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right) + c_4 sh\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 z\right)\right) + \\ - \frac{2\frac{H}{R}b_3 b_4 + \frac{E}{B}b_3^2 + b_4^2 - \frac{E}{R}b_5}{b_4^2 - \frac{E}{B}b_5}\frac{1}{E}q_0\overline{H}(s)z + c_0 \tag{19}$$

Występujące w równaniu (19) współczynniki: c_0, …, c_4 należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Po ich uwzględnieniu i przekształceniach otrzymamy:

$$c_0 = \frac{2\frac{H}{R}b_3b_4 + \frac{E}{B}b_3^2 + b_4^2 - \frac{E}{R}b_5}{b_4^2 - \frac{E}{B}b_5}\frac{1}{E}q_0h\overline{H}(s)$$

$$\begin{aligned} c_2 = &-p_1\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}q_0\overline{H}(s) - p_2\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{1}{B}\frac{\lambda_T T_0}{s}q_0\overline{H}(s) + \\ &-\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{1}{b_4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}}\rho_2^2 - Eb_5\right)\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}\frac{\vartheta_0}{T_0}\overline{L}(s) \\ c_4 = &\ p_1\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\cdot\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}q_0\overline{H}(s) + p_2\frac{\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{1}{B}\frac{\lambda_T T_0}{s}q_0\overline{H}(s) + \\ &+\frac{1}{\rho_1^2-\rho_2^2}\frac{1}{b_4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}}\rho_1^2 - Eb_5\right)\frac{\sqrt{k\lambda_T T_0}}{s}\frac{\vartheta_0}{T_0}\overline{L}(s) \\ c_1 = &-c_2\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 h\right), \\ c_3 = &-c_4\cdot th\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 h\right) \end{aligned} \tag{20}$$

gdzie p_1 i p_2 dane są związkami:

$$p_1 = \frac{b_3}{b_4}, \qquad p_2 = \frac{\frac{b_3}{b_4} + \frac{BH}{ER}}{b_4^2 - \frac{E}{B}b_5} \tag{21}$$

Uwzględniając otrzymane rezultaty, zapiszemy transformatę osiadania brzegu warstwy konsolidującej: $\overline{w}_0 = \overline{w}(z = 0, s)$:

$$\bar{w}_0 = -\frac{H}{ER}\left[p_1\bar{G}_1(h,s,\rho_1,\rho_2) + \sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}}\frac{1}{B}p_2\bar{G}_2(h,s,\rho_1,\rho_2)\right]q_0\bar{H}(s) +$$

$$+\left(b_3 b_4 + \frac{H}{R}b_5\right)\left[p_1\sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}}\bar{G}_3\left(h,s,\rho_1,\rho_2\right) + p_2\frac{1}{B}\bar{G}_4\left(h,s,\rho_1,\rho_2\right)\right]q_0\bar{H}(s) +$$

$$-\frac{1}{b_4}\frac{H}{ER}\left[\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}}\bar{G}_2\left(h,s,\rho_1,\rho_2\right) - Eb_5\bar{G}_3\left(h,s,\rho_1,\rho_2\right)\right]\frac{\vartheta_0}{T_0}\bar{L}(s) + \tag{22}$$

$$+\frac{1}{b_4}\left(b_3 b_4 + \frac{H}{R}b_5\right)\left[\bar{G}_4\left(h,s,\rho_1,\rho_2\right) - Eb_5\sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}}\bar{G}_3\left(h,s,\rho_1,\rho_2\right)\right]\frac{\vartheta_0}{T_0}\bar{L}(s) +$$

$$+\frac{2\frac{H}{R}b_3 b_4 + \frac{E}{B}b_3^2 + b_4^2 - \frac{E}{R}b_5}{b_4^2 - \frac{E}{B}b_5}\frac{1}{E}hq_0\bar{H}(s)$$

Tutaj przyjęto oznaczenia:

$$\bar{G}_1\left(h,s,\rho_1,\rho_2\right) = \frac{1}{\rho_1^2 - \rho_2^2}\frac{\rho_1 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 h\right] - \rho_2 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 h\right]}{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}}$$

$$\bar{G}_2\left(h,s,\rho_1,\rho_2\right) = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2}\frac{\rho_2 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 h\right] - \rho_1 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 h\right]}{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}}$$

$$\bar{G}_3\left(h,s,\rho_1,\rho_2\right) = \frac{1}{\rho_1\rho_2}\frac{1}{\rho_1^2 - \rho_2^2}\frac{\rho_2 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 h\right] - \rho_1 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 h\right]}{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}} \tag{23}$$

$$\bar{G}_4\left(h,s,\rho_1,\rho_2\right) = \frac{1}{\rho_1\rho_2}\frac{1}{\rho_1^2 - \rho_2^2}\frac{\rho_2^3 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_1 h\right] - \rho_1^3 th\left[\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_2 h\right]}{\sqrt{\frac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}}$$

Dla głębiej położonych warstw gruntu, z uwagi na znaczący ciężar nadkładu, możemy przyjąć, że przemieszczenia wywołane zmianami temperatury są pomijalne. Stąd można napisać:

$$\overline{w}_0 = 0 \tag{24}$$

Powyższy warunek pozwala wyznaczyć zależność pomiędzy temperaturą na brzegu warstwy a naprężeniem wynikającym z jej zmian. Ze związków: (22) i (24) otrzymujemy po przekształceniach:

$$q_0 = -\frac{\overline{P}_T(s)}{\overline{P}_q(s)} \frac{\overline{L}(s)}{\overline{H}(s)} \frac{\vartheta_0}{T_0} \tag{25}$$

Tutaj oznaczono:

$$\begin{aligned}
\overline{P}_q(s) = & -\frac{H}{ER}\left[p_1 \overline{G}_1(h,s,\rho_1,\rho_2) + \sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}} \frac{1}{B} p_2 \overline{G}_2(h,s,\rho_1,\rho_2) \right] + \\
& + \left(b_3 b_4 + \frac{H}{R} b_5 \right) \left[p_1 \sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}} \overline{G}_3(h,s,\rho_1,\rho_2) + p_2 \frac{1}{B} \overline{G}_4(h,s,\rho_1,\rho_2) \right] + \\
& + \frac{2\frac{H}{R} b_3 b_4 + \frac{E}{B} b_3^2 + b_4^2 - \frac{E}{R} b_5}{b_4^2 - \frac{E}{B} b_5} \frac{1}{E} h \\
\overline{P}_T(s) = & -\frac{1}{b_4} \frac{H}{ER}\left[\sqrt{\frac{\lambda_T T_0}{k}} \overline{G}_2(h,s,\rho_1,\rho_2) - E b_5 \overline{G}_3(h,s,\rho_1,\rho_2) \right] + \\
& + \frac{1}{b_4}\left(b_3 b_4 + \frac{H}{R} b_5 \right) \left[\overline{G}_4(h,s,\rho_1,\rho_2) - E b_5 \sqrt{\frac{k}{\lambda_T T_0}} \overline{G}_3(h,s,\rho_1,\rho_2) \right]
\end{aligned} \tag{26}$$

Dokonując odwrócenia transformacji Laplace'a na (22) możemy wyznaczyć osiadanie brzegu. Operacja ta zwykle wymaga obliczenia złożonych całek [3], tak też jest i w tym przypadku. Ważne rezultaty, mianowicie osiadanie w chwili początkowej i końcowej procesu konsolidacji, można jednak uzyskać w stosunkowo prosty sposób.

Wykorzystamy do tego celu twierdzenia graniczne [3] orzekające, że:

$$\lim_{s\to 0} s\cdot \overline{w}(s) = \lim_{lt\to\infty} w(t)$$

$$\lim_{s\to\infty} s\cdot \overline{w}(s) = \lim_{lt\to 0} w(t) \tag{27}$$

Należy więc obliczyć odpowiednie granice dla funkcji (25). Mamy oczywiście:

$$\lim_{s\to 0}\frac{th\left(\sqrt{\dfrac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_i h\right)}{\sqrt{\dfrac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}} = \rho_i h,\quad i=1,2$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{th\left(\sqrt{\dfrac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}\rho_i h\right)}{\sqrt{\dfrac{s}{\sqrt{k\lambda_T T_0}}}} = 0,\quad i=1,2 \tag{28}$$

a stąd:

$$\lim_{s\to 0}\overline{G}_1\left(h,s,\rho_1\rho_2\right)=h,\qquad \lim_{s\to 0}\overline{G}_2\left(h,s,\rho_1\rho_2\right)=0$$

$$\lim_{s\to 0}\overline{G}_3\left(h,s,\rho_1\rho_2\right)=0,\qquad \lim_{s\to 0}\overline{G}_4\left(h,s,\rho_1\rho_2\right)=-h \tag{29}$$

$$\lim_{s\to 0}\overline{G}_i\left(h,s,\rho_1\rho_2\right)=0,\qquad i=1,\dots,4$$

Stąd otrzymujemy początkowe i końcowe osiadanie warstwy, wywołane obciążeniem zewnętrznym q_0:

$$w_0\left(t\to 0\right)=\frac{2\dfrac{H}{R}b_3b_4+\dfrac{E}{B}b_3^2+b_4^2-\dfrac{E}{R}b_5}{b_4^2-\dfrac{E}{B}b_5}\frac{1}{E}hq_0 \tag{30}$$

$$w_0\left(t\to\infty\right)=\frac{1}{E}hq_0-\frac{1}{b_4}\left(b_3b_4+\frac{H}{R}b_5\right)h\frac{\vartheta_0}{T_0} \tag{31}$$

Zakładając brak wrażliwości ośrodka na zmiany temperatury, otrzymamy z (30) przy uwzględnieniu (3):

$$w(t \to 0) = \frac{H}{RE + H^2} h q_0 \tag{32}$$

Dla przypadku naprężenia wywołanego zmianami temperatury na brzegu warstwy mamy z (24), (25) i (31):

$$q_0 = \frac{E}{b_4}\left(b_3 b_4 + \frac{H}{R} b_5\right)\frac{\vartheta_0}{T_0} \tag{35}$$

4. Uwagi końcowe

Otrzymane wyniki stanowią fragment pełnego rozwiązania zagadnienia brzegowego dla warstwy konsolidującej, niemniej pozwalają podjąć dyskusję o jego właściwościach. Tak więc jest widoczne, że końcowe osiadanie brzegu warstwy dane wzorem (31) opisuje analogiczna zależność, jak dla ośrodka niewrażliwego na temperaturę, z uwzględnieniem oczywiście jej wpływu. Inaczej jest z początkowym osiadaniem warstwy. Jest ono różne w przypadku ośrodka wrażliwego na temperaturę i niewrażliwego. O wielkości tych różnic decydują termiczne właściwości ośrodka. Interesująca jest zależność (33), wiążąca ze sobą naprężenia i temperaturę, która je wywołała. Związek ten może być wykorzystany do oszacowania naprężeń w gruncie, w szczególności reakcji podłoża na budowlę, przy zmianach temperatury. Z postaci transformaty Laplace'a osiadań (22) wynika, że w czasie procesu konsolidacji wielkość ta zależy od stosunku współczynników: przepływu cieczy i przewodności.

LITERATURA

[1] *Biot M.A.*: General theory of three-dimensional consolidation. J. Appl. Phys., 1941, No. 12, 155
[2] *Coussy O.*: Mechanics of Porous Continua. John Willey & Sons, 1995
[3] *Doetsch G.*: Praktyka przekształcenia Laplace'a. PWN, Warszawa 1964
[4] *Gaszyński J.*: Identyfikacja modelu konsolidacji Biota na podstawie realizacji jednoosiowego zadania brzegowego. Archiwum Hydrotechniki PAN, XXXI, t. 1–2, 1984, s. 125–135
[5] *Gaszyński J.*: Konsolidacja porowatej warstwy nasyconej cieczą z uwzględnieniem wpływu temperatury. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo, nr 1756, 2007
[6] *Kowalski S.J.*: Thermomechanics of Drying Process of Fluid-Saturated Porous Media. Drying Technology, 1994, vol. 12, No. 4, s. 453–482
[7] *Strzelecki T.*: Równania termokonsolidacji gruntów i skał. Geotechnika i Budownictwo Specjalne, AGH, XXIX, 2006, s. 285–299