

*Roman Kinash**

METODY OCENY NIEZAWODNOŚCI KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH PRZY NIEPEŁNYCH PARAMETRACH**

1. Wprowadzenie

Obliczenie niezawodności konstrukcji, jej geometrycznych wymiarów i dokonania analizy mechanicznych charakterystyk wymaga dysponowania danymi z pomiarów. W praktyce uzyskanie odpowiedniego zbioru jest trudne. Szczególnie odczuwa się to podczas wykonywania pomiarów na jednostkowym obiekcie, choć i w tym przypadku można w przybliżeniu ocenić jego niezawodność.

Najczęściej trzeba ocenić niezawodność pojedynczego obiektu przy znanym albo częściowo znanym jego rozkładzie obciążenia [2]. Przy pomocy technik pomiarowych można ustalić parametry konstrukcji — nośność, wymiary geometryczne, ale tylko w granicach przedziału, który określa się błędem pomiarów. O rozkładzie parametrów w środku tego przedziału zazwyczaj nic nie wiadomo, ponieważ tylko niektóre bardzo precyzyjne urządzenia pomiarowe posiadają certyfikat z podaniem rozkładu błędu. Ich wykorzystanie w budownictwie jest ograniczone, dlatego zadowalamy się wartością względną (lub absolutną) niedokładności, wielkość której, ogólnie mówiąc, może być uzależniona od wartości mierzonego parametru.

Dane wejściowe przedstawione są w postaci przedziału, w którym znajduje się z pewnym prawdopodobieństwem zmierzona wartość parametru. Oczywiście jest, że uwzględniając ten przedział wskazane jest wykorzystanie opracowanych przez autora metod analizy przedziałowej [3–6]. Po obliczeniu z ich wykorzystaniem koniecznej wytrzymałości konstrukcji (w przedziałowym przedstawieniu) możemy porównać ją z obciążeniem i otrzymać przybliżoną ocenę niezawodności.

* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

** Wykonano w ramach pracy statutowej nr 11.11.100.588

Artykuł zawiera wyniki porównania metod przedziałowych, Monte Carlo oraz linearyzacji otrzymanych przy wykonaniu oceny niezawodności słupa żelbetowego o kwadratowym przekroju.

2. Ocena dokładności i wiarygodności metody przedziałowej

W celu porównania i oceny dokładności metody przedziałowej zostało rozwiązane zadanie obliczenia nośności słupa żelbetowego metodą Monte Carlo (MMC) oraz linearyzacji. Obliczenie wskazuje, że wyniki otrzymane metodami histogramowymi, MMC oraz linearyzacji praktycznie są bardzo zbliżone, z kolei metoda przedziałowa, choć daje zawyżoną ocenę przedziału i wymaga mniejszej liczby danych wejściowych, jednak jest szybsza i bardziej uniwersalna. Z tego powodu jest bardziej przydatna do szerokiego wykorzystania przez inżynierów.

Przy zastosowaniu metody przedziałowej tracimy dokładność wskutek tego, że nawet kiedy znamy niektóre rozkłady wartości wchodzących do wzoru wejściowego, nie możemy tej wiedzy wykorzystać, ponieważ niemożliwe są operacje pomiędzy liczbami, z których jedno opisane są rozkładem, a inne — przedziałem. Należy wtedy wszystkie zmienne sprowadzić do postaci przedziałowej, co w istocie oznacza aproksymacje funkcji gęstości rozkładu funkcją Heaviside'a [7].

Te problemy nie powstają przy korzystaniu z MMC, która może połączyć faktyczne funkcje rozkładu w znanych przypadkach z równomiernym rozkładem prawdopodobieństwa dla wartości, o których nasza wiedza jest ograniczona.

Z punktu widzenia matematyki odnośnie dokładności metody poszukiwania niezawodności konstrukcji każda para z niżej wymienionych metod zapewnia jednakową dokładność wyników w kolejności:

- 1) analityczna oraz MMC;
- 2) przedziałowa oraz linearyzacji.

Natomiast ze względu na łatwość wykonywania obliczeń i ich praktycznego zastosowania ta kolejność istotnie zmienia się:

- 1) metoda Monte Carlo, jeżeli nie uwzględniamy czasu na wykonywanie obliczeń;
- 2) metoda przedziałowa (histogramowa);
- 3) metoda linearyzacji — stosowana w przypadku, kiedy znany jest wzór końcowy (zakładając, że teraz wszystkie zadania praktyczne rozwiązywane są przy pomocy metod numerycznych, ta metoda jest nieprzydatna);
- 4) metoda analityczna — nie jest stosowana w zagadnieniach praktycznych.

Dwie pierwsze metody można wykorzystać zawsze, dlatego też metoda przedziałowa może być wykorzystana jako przybliżona metoda określenia początkowej niezawodności konstrukcji budowlanych oraz do ustalenia współczynnika zapasu przy niedostatecznej liczbie danych wejściowych do oszacowania modeli statystycznych.

3. Metoda obliczeń niezawodności słupa żelbetowego

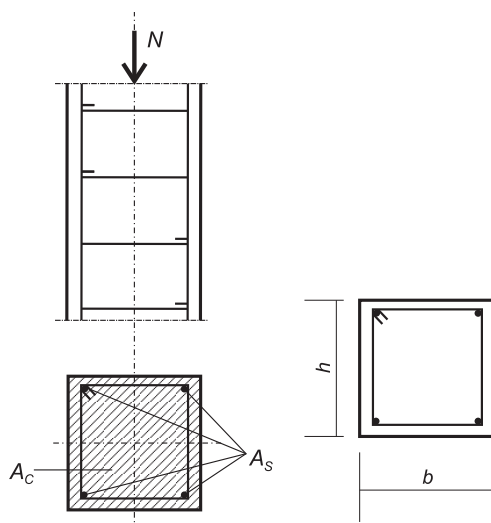
Przekroje żelbetowych słupów zwykłych są najczęściej kwadratowe lub prostokątne (rys. 1), rzadziej innych kształtów [1]. Obliczanie przekrojów według nośności granicznej opiera się na założeniu, że suma sił zewnętrznych, działająca na przekrój żelbetowego słupa, nie spowoduje w nim przekroczenia obliczeniowej wytrzymałości betonu na ściskanie f_{cd} ani obliczeniowej wytrzymałości stali zbrojeniowej f_{yd} .

Nośność przekrojów żelbetowych słupów ściskanych osiowo przy $e_{0/h} < 0,035$ niezwojonych określa się według wzoru:

$$N \leq f_{cd} \cdot A_c + f_{yd} \cdot A_s \quad (1)$$

gdzie:

- f_{yd} — wytrzymałość obliczeniowa stali na ściskanie,
- f_{cd} — wytrzymałość obliczeniowa betonu na ściskanie,
- A_s — pole powierzchni przekroju poprzecznego zbrojenia,
- $A_c = bh$ — pole powierzchni przekroju poprzecznego żelbetu,
- b — szerokość przekroju poprzecznego żelbetu,
- h — wysokość przekroju poprzecznego żelbetu (oznaczenie przyjęto wg [8]).



Rys. 1. Schemat i przekroje słupa żelbetowego

Porównamy wyniki, jakie otrzymujemy przy rozwiązywaniu najprostszego zadania różnymi metodami: przedziałową, histogramową, metodą Monte Carlo oraz linearyzacją.

Polega to na rozwiązaniu najprostszego zadania jednoosiowego centralnego ściskania żelbetonowego słupa (rys. 1), który ma wytrzymałość N , obliczoną według wzoru (1).

Wartości zmiennych przyjęte warunkowo jako liczby losowe o rozkładzie normalnym przedstawiono w tabeli 1.

TABELA 1
Wartości obliczeniowe

Oznaczenie parametru	Średnie wartości	C_{var} [%]
f_{cd} , MPa	30	12
f_{yd} , MPa	365	6
A_s , cm ²	12,32	5
b , cm	50	5
h , cm	50	1,5

Wszystkie omawiane metody są przeznaczone do obliczeń w różnych warunkach nieokreśloności i nie można porównywać ich między sobą, ponieważ pojęciem prawdopodobieństwa operują tylko metody Monte Carlo i histogramowa [3–6], a metody przedziałowe i linearyzacji nie operują niezawodnością (jako prawdopodobieństwem), wyznaczając tylko granice zmiany szukanego parametru. Jednak w tym przypadku można obliczyć przedziałowy i histogramowy współczynnik zapasu wytrzymałości. (W metodzie histogramowej oblicza się niezawodność, jednak z małym błędem, wywołanym ograniczoną liczbą danych wejściowych, dla których ta metoda jest przeznaczona [5]).

Wstępnie przyjmujemy, że w wyniku przeprowadzonych badań udało się otrzymać kilka wartości wszystkich zmiennych (we wzorze (1)), na podstawie których nie można wyznaczyć rodzaju rozkładu ani jego parametrów, a jedynie przedział, w którym znajdują się dane wartości.

W celu wykonania obliczeń metodą przedziałową wzór (1) opracowano w programie napisanym w języku PASCAL.

Ponieważ w modelu występują zmienne typu *PGist*, program został uzupełniony o procedury pozwalające na zapisanie zmiennych histogramowych (przedział także uważa się za zmienną histogramowego typu, w której liczba słupków jest równa 1).

Dodatkowo do programu dodaje się moduł wprowadzenia–wyprowadzenia, co pozwala na jego wykorzystanie do obliczeń przedziałowych i histogramowych. Trzeba tylko przy wprowadzeniu zmiennych zakładać liczbę słupków histogramu i wykonywać odpowiednie reguły (suma gęstości we wszystkich słupkach równa się 1, gęstość dodatnia itd.).

Podczas kompilacji do programu automatycznie dodawane są moduły programowe, niezbędne do obliczeń przedziałowych i histogramowych, a także przedstawienia standardowych funkcji języka PASCAL [6].

4. Analiza porównawcza metod obliczenia przy ograniczonej liczbie danych

Po wykonaniu obliczeń z podanymi zmiennymi metodą przedziałową otrzymano wytrzymałość słupa żelbetowego w granicach od 6750 do 8700 kN.

Wykonano analizę zgodności otrzymanego wyniku z metodą linearyzacji. Odchylenie ΔN jako średnia kwadratowa odchyień dla każdej zmiennej oblicza się wg wzoru:

$$\Delta N = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial}{\partial f_{cd}} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right)^2 \cdot \Delta f_{cd}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial A_c} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right)^2 \cdot \Delta A_c^2 + \dots \right.} \quad (2)$$

$$\left. \dots + \left(\frac{\partial}{\partial f_{yd}} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right)^2 \cdot \Delta f_{yd}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial A_s} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right)^2 \cdot \Delta A_s^2 \right.}$$

Jak widać, nawet dla tak prostego zadania wzór (2) przybiera skomplikowaną postać matematyczną. W takim przypadku przy nielicznych danych badań doświadczalnych metody przedziałowe są niezastąpione.

Kolejne wartości liczbowe pokazują, że największy udział na wynik ΔN ma zmienność wytrzymałości betonu, a nie zbrojenia. Obliczenia podano we wzorach (3).

$$\left(\frac{\partial}{\partial A_s} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right) = 365 \text{ MPa};$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial A_c} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right) = 30 \text{ MPa};$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial f_{yd}} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right) = 0,001232;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial f_c} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right) = 0,097;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial f_{cd}} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right)^2 \cdot \Delta f_{cd}^2 = 0,115; \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial A_c} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right)^2 \cdot \Delta A_c^2 = 0,045;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial f_{yd}} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right)^2 \cdot \Delta f_{yd}^2 = 7,28 \cdot 10^{-4};$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial A_s} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right)^2 \cdot \Delta A_s^2 = 5,055 \cdot 10^{-4}.$$

W każdym przypadku końcowe odchylenie wyniku nigdy nie przekracza wartości zadanej wzorem (4):

$$\begin{aligned} \partial N = & \left| \frac{\partial}{\partial f_{cd}} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right| \cdot \Delta f_{cd} + \left(\frac{\partial}{\partial f_{yd}} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right)^2 \cdot \Delta f_{yd}^2 + \dots \\ & \dots + \left| \frac{\partial}{\partial A_c} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right| \cdot \Delta A_c + \left(\frac{\partial}{\partial A_s} N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) \right)^2 \cdot \Delta A_s^2. \end{aligned} \quad (4)$$

W wyniku obliczeń otrzymano spodziewaną wartość $\Delta N = 4,01$ MPa, przy średniej wartości naprężenia ściskania w przekroju poprzecznym słupa wywołanego obciążeniem $N - \sigma_N(f_{cd}, A_c, f_{yd}, A_s) = 32,7$ MPa.

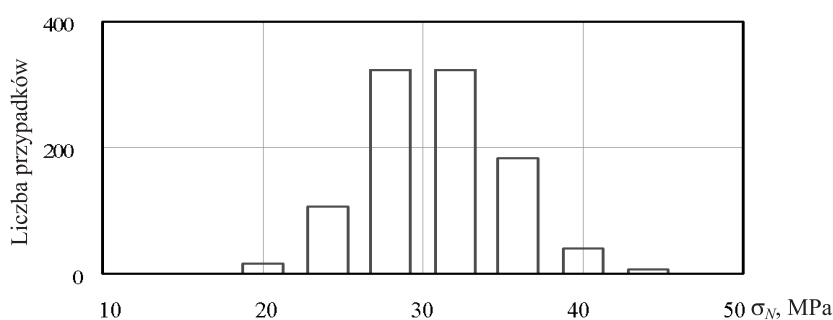
Teoretycznie, jeżeli wartości eksperymentalne nigdy nie będą przekraczać przyjętych poprzednio przedziałów, to wartość ΔN nie przekroczy 5,99 MPa.

Metodą przedziałową otrzymano odchylenie $\Delta N = 6,0$ MPa od wartości średniej, które odpowiada z dokładnością do 0,001 ostrożnej ocenie.

Rozpatrzmy teraz porównanie metody histogramowej z metodą Monte Carlo (MMC). Podczas obliczeń zakłada się, że baza doświadczalna jest większa i pozwala na ustalenie rodzaju przedziału (w tym przypadku — normalny) generowanego w MMC. W metodzie histogramowej nie przyjmuje się żadnych założeń, jedynie buduje się słupki histogramów danych wejściowych na podstawie wyników badań doświadczalnych. Nie rozważa się również optymalizacji budowy histogramu z wyników danych doświadczalnych (szerokość różnych słupków i ich liczby).

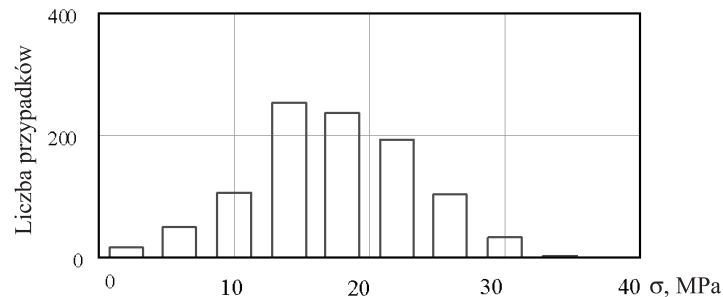
Niżej podano wyniki rozwiązania zadania metodą Monte Carlo oraz metodą histogramową w celu ich porównania.

Na rysunku 2 przedstawiono histogram wytrzymałości żelbetowego słupa na jednostkę powierzchni obliczoną w MPa.



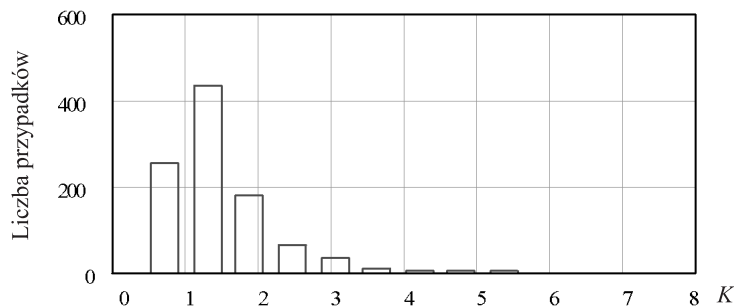
Rys. 2. Histogram rozkładu wytrzymałości słupa żelbetowego

Na rysunku 3 przedstawiono histogram doświadczalnego obciążenia zewnętrznego, również podanego w MPa.



Rys. 3. Histogram rozkładu obciążenia zewnętrznego

Na rysunku 4 przedstawiono wykres histogramowego współczynnika zapasu wytrzymałości K słupa żelbetowego obciążonego zmiennym obciążeniem jak na rysunku 2.



Rys. 4. Współczynnik histogramowy zapasu wytrzymałości K

Jego obliczenie polega na dzieleniu histogramu wytrzymałości słupa (rys. 2) na histogram obciążenia (rys. 3) według reguł histogramowego dzielenia [5]. Oznacza to, że każdy słupek histogramu przyjęto jako przedział z równomiernym rozkładem i pewną wartością prawdopodobieństwa, która jest proporcjonalna do jego wysokości. Każdy słupek wytrzymałości pomnożono albo podzielono przez każdy słupek obciążenia według reguł liczb przedziałowych, a wynik końcowy otrzymano z sumowania wykresów. Takie czynności wykonuje się z każdym słupkiem osobno. Suma prawdopodobieństw histogramów albo jej powierzchnia wynosi 1.

Histogramy nośności i obciążenia na rysunkach 2 i 3 mają charakter rozkładu normalnego, natomiast histogramowy współczynnik zapasu ma wygląd specyficzny (patrz rys. 4). Nieliczny odsetek przypadków jest mniejszy od 1, a niekiedy współczynnik zapasu wytrzymałości sięga wartości 5,5.

Na podstawie histogramowego współczynnika zapasu można obliczyć niezawodność konstrukcji wyznaczając powierzchnię, która znajduje się po prawej stronie od wartości $K = 1$ na rysunku 4. Wynik taki zawiera mniej informacji, ponieważ przedstawiony jest jedną liczbą, a nie funkcją.

Niezawodność obliczona na podstawie analizy histogramowego współczynnika zapasu wytrzymałości równa się 0,95. Wyniki badań przedstawiono w tabeli 2.

TABELA 2
Wyniki porównania metod obliczeń niezawodności

Metoda obliczeń	Średnie wartości naprężeń [MPa]	Obliczona niezawodność
Linearyzacji	28,5	0,95
Przedziałowa	27,7	0,94
Histogramowa	29,9	0,95
Monte Carlo	29,3	0,959

Analiza wyników porównań podanych w tabeli 2 wskazuje, że MMC daje niezawodność 0,959. Oznacza to, że różnica obliczeń metodą histogramową i MMC nie przekracza 1%. Dla wyznaczenia parametrów „ogonów” taka dokładność zazwyczaj jest niewystarczająca, ale metoda analizy histogramowej była opracowana właśnie dla przypadków z ograniczoną liczbą danych wejściowych, tylko do oceny poziomu bezpieczeństwa niezawodności. Zwraca uwagę fakt, że praktycznie nie istnieją na tyle dokładne dane wejściowe, aby można było w pełni wykorzystywać metody analityczne.

5. Wnioski

- 1) W artykule przedstawiono przedziałową i histogramową metodę obliczenia niezawodności. Są one oparte na uwzględnieniu początkowej niejednorodności materiałów i zmienności obciążeń oraz wymiarów geometrycznych i ich możliwej zmianie w czasie. Charakteryzują się one niedokładnością matematycznego modelu konstrukcji i stosowane są przy niedostatecznej liczbie danych wejściowych (otrzymanie większej ilości danych jest niemożliwe lub nieekonomiczne).
- 2) Metody powyższe i ich rozwiązania matematyczne i programowe są uniwersalne, przydatne do rozwiązywania zagadnień praktycznych, w przeciwieństwie do metod analitycznych, które mają ograniczone zastosowanie użytkowe.
- 3) Możliwość takiej adaptacji istniejących schematów obliczeniowych, stworzonych na podstawie tradycyjnego podejścia do obliczenia wytrzymałości, która jest jedną z charakterystyk niezawodności konstrukcji, powoduje, że metody te powinny być dostępne dla inżynierów bez specjalnego przygotowania. Pozwoli im to ocenić niezawodność konstrukcji i ich składowych elementów oraz pomoże wyodrębnić najbardziej zawodne w celu ich wzmocnienia.

- 4) Przy ograniczonej wiedzy o parametrach wytrzymałościowych materiału oraz wymiarach geometrycznych konstrukcji przedstawione przedziałowe i histogramowe współczynniki zapasu, podają więcej informacji niż klasyczne pojęcie niezawodności.

LITERATURA

- [1] *Grabiec K.*: Projektowanie konstrukcji betonowych i żelbetowych według metody stanów granicznych. Warszawa – Poznań, PWN 1977
- [2] *Murzewski J.*: Podstawy projektowania i niezawodność konstrukcji. Kraków, 2001
- [3] *Kinash R.*: Estimation of Reliability of Building structures by Means of the Method of Interval calculation. Materiały XLIV Konferencji naukowej. Tom III. Krynica. 1998. s. 101–107
- [4] *Kinash R.*: Creating software for reliability calculation of reinforced concrete structures. Proceedings of the 13th FIP Congress. Amsterdam. Vol. 2, 1998, s. 823–827
- [5] *Kinash R.*: Application of interval and histogram methods to the task of reliability of building structures. Proceedings of the 14th FIP Congress, Praha, vol. 2, 1999, s. 535–536
- [6] *Kinash R.I.*: Inverse problem of reliability for reinforced concrete constructions. Brazil, 2000, s. 232–240
- [7] *Shary S.P.*: Algebraic Approach in the “Outer Problem” for Interval Linear Equations. Reliable Computing. No. 3, 1997, s. 103–135
- [8] *Starosolski W.*: Konstrukcje żelbetowe: wg PN-B-03264:2002. T. 2. Warszawa, PWN 2007