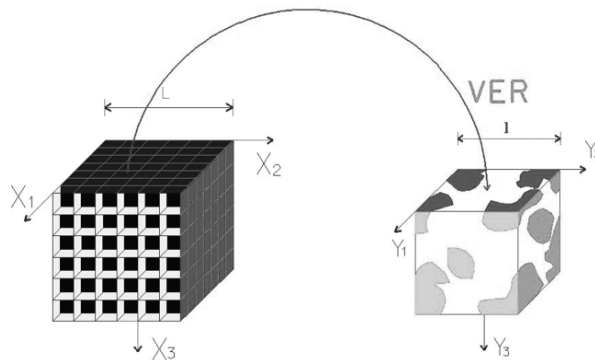


*Tomasz Strzelecki**

OBLICZENIA NUMERYCZNE TENSORA PRZEPUSZCZALNOŚCI DARCY'EGO W OPARCIU O METODĘ ASYMPTOTYCZNEJ HOMOGENIZACJI

1. Wprowadzenie

Założmy, że ośrodek porowaty tworzy nieodkształcalną strukturę utworzoną z ciała stałego. Wewnątrz tej struktury istnieje sieć kanałków filtracyjnych wzajemnie połączonych na tyle regularnie, że można określić objętość elementarną reprezentatywną VER, spełniającą warunki periodyczności strukturalnej. Przyjmujemy, że rozważane ciało zawiera dużą liczbę takich powtarzalnych elementów, co schematycznie można przedstawić na rysunku 1.



Rys. 1. Przekrój przez periodyczną strukturę ośrodka porowatego

Przez pory ośrodka przepływa nieściśliwa ciecz Newtona, a zjawisko odbywa się w stałej temperaturze (proces izotermiczny). Teoria homogenizacji przepływu filtracyjnego była przedmiotem licznych publikacji [1, 2, 4–7].

* Wydział Budownictwa Lądowego, Politechnika Wroclawska, Wrocław

Proces przepływu w periodycznym obszarze VER opisują równania:

— Równania ruchu:

$$\operatorname{div} \sigma^{lf} = \rho^f \frac{D\vec{v}^f}{Dt} \quad (1)$$

gdzie:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}^f \operatorname{grad} \bullet$$

\vec{v}^f — określa wektor prędkości płynącej cieczy, przy czym indeks f oznacza, że mamy do czynienia z wartością fizyczną wymiarową;

σ^{lf} — określa wektor naprężenia w cieczy, przy czym indeks l oznacza ciecz;

ρ^f — oznacza gęstość przepływającej przez ośrodek cieczy.

— Związki konstytutywne w przypadku cieczy Newtona:

$$\sigma^{lf} = -p^f \cdot \mathbf{I} + \mu \mathbf{D}(\vec{v}^f) \quad (2)$$

przy czym \mathbf{D} oznacza tensor prędkości dewiatora odkształcenia.

W zapisie wskaźnikowym tensor ten opisuje się wyrażeniem:

$$D_{ij} = e_{ij}(\vec{v}^f) - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk}(\vec{v}^f)$$

gdzie:

$$e_{ij}(\vec{v}^f) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^f}{X_j} + \frac{\partial v_j^f}{X_i} \right) \text{ dla przypadku małych prędkości przepływu (przepływ laminarny), } \mathbf{I} \text{ jest tensorem jednostkowym,}$$

δ_{ij} — delta Kroneckera.

— Równania zachowania masy:

$$\frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^f \vec{v}^f) = 0 \quad (3)$$

Powyższy zbiór równań (1)–(3), opisujący przepływ cieczy, uzupełnia warunek adhezji na granicy fazy ciekłej i fazy stałej ośrodka:

$$\vec{v}_{|r}^f = 0 \quad (4)$$

Zakładamy ponadto, że periodyczność struktury powoduje, iż wszystkie funkcje wektorowe i skalarne są Ω -periodyczne (Ω — określa objętość komórki elementarnej reprezentatywnej VER). Uwzględniając postulat nieściśliwości cieczy newtonowskiej, układ równań opisujących proces przepływu z uwzględnieniem postulatu periodyczności można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}^f - \text{grad } p^f &= \rho^f \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}^f}{\partial t^f} + \bar{\mathbf{v}}^f \text{grad } \bar{\mathbf{v}}^f \right) \\ \text{div } \bar{\mathbf{v}}^f &= \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{v}}^f|_{\Gamma} = \bar{\mathbf{0}}, \quad [\bar{\mathbf{v}}^f] = 0, \quad [p] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Powyższym układem równań (5) opisuje się proces przepływu cieczy nieściśliwej przez pory nieodkształcalnego ośrodka i stanowi on punkt wyjścia do rozpoczęcia procesu homogenizacji, opartej na metodzie zbieżności dwuskalowej opisanej szczegółowo w pracy [2, 7].

Rozwiązaniem powyższego układu równań są:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}^{(0)} &= -\mathbf{k}(\mathbf{y}) \text{grad}_x p^{(0)}, \\ p^{(1)} &= \bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}) \text{grad}_x p^{(0)} + \tilde{p}^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie tensor $\mathbf{k}(\mathbf{y})$ i wektor $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})$ są funkcjami zmiennej lokalnej, a $\tilde{p}^{(1)}$ jest funkcją zależną tylko od zmiennej makroskopowej x . Układ równań teorii homogenizacji dla pojedynczej celki periodycznej sprowadza się ostatecznie, na podstawie prac [1, 2, 7], do postaci:

$$\begin{aligned} \nabla_{y_j}^2 \mathbf{k}(\mathbf{y}) + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})}{\partial y_j} + \delta_{ij} &= \mathbf{0}, \\ \text{div}_y \mathbf{k}(\mathbf{y}) \mathbf{I} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{k}(\mathbf{y})|_{\Gamma} &= \mathbf{0}, \quad [\mathbf{k}(\mathbf{y})] = \mathbf{0}, \quad [\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Równania (7) stanowią punkt wyjścia do określenia, po ich uśrednieniu, wielkości makroskopowego współczynnika filtracji Darcy'ego. Przy użyciu metod numerycznych, układ równań (7) pozwala na sformułowanie zagadnienie brzegowego.

Uzyskane funkcje $\mathbf{k}(\mathbf{y})$ i $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})$ po uśrednieniu wyznaczają tensor drugiego rzędu k_{ij} i wektor $\bar{\boldsymbol{\tau}}$.

Zapisując rozwiązanie pierwsze z (6) w składowych wektora prędkości filtracji mamy:

$$v_i^{(0)} = -k_{ij}(y) \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j} \quad (8)$$

Przechodząc w równaniu (8) do zmiennych fizycznych uzyskujemy:

$$v_i^{f(0)} = -\mathbf{k}_{ij}(y) \frac{l^2}{\mu} \frac{\partial p^{f(0)}}{\partial X_j} \quad (9)$$

gdzie l określa oznaczona wymiar celki VER, a μ — lepkość przepływającej cieczy. Po dokonaniu operacji uśrednienia ze względu na współrzędną przestrzenną y mamy:

$$v_i^{f(0)} = -\mathbf{k}_{ij}(y) \frac{l^2}{\mu} \frac{\partial p^{f(0)}}{\partial X_j} \quad (10)$$

gdzie: $\langle \bullet \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \bullet dv$, \tilde{k}_{ij} jest tensorem drugiego rzędu przepuszczalności filtracyjnej,

którego wartość liczbowa jest rzędu wielkości $\tilde{k}_{ij} = O\left(\frac{l^2}{\mu} k_{ij}\right)$, przy czym k_{ij} jest wielkością

średnią $\left\langle \frac{l^2}{\mu} k_{ij}(y) \right\rangle$, zależną od struktury wewnętrznej w skali niejednorodności.

Wątpliwości może budzić sens wielkości średniej $\bar{v}^{f(0)}$ definiowanej jako wielkość średniej objętościowej, gdy tymczasem prędkość filtracji jest związana z przepływem przez powierzchnię, a więc powinniśmy obliczać średnią po powierzchni. W rzeczywistości można udowodnić, jak to pokazano w pracy [7], że w tym przypadku obie średnie są sobie równe. Wynika to z charakteru selenoidalnego funkcji $\bar{v}^{(0)}$.

2. Określenie współczynnika filtracji metodą numeryczną

Określmy wartości tensora przepuszczalności w przypadku płaskiego i odpowiadającego mu przestrzennego przepływu przez periodyczną komórkę o wymiarze l . Na podstawie poprzednio przedstawionych rozważań zagadnienie sprowadza się do rozwiązania układu równań przepływu filtracyjnego z warunkami brzegowymi na kontakcie z ciałem stałym $\bar{\mathbf{v}}|_{\Gamma} = \bar{\mathbf{0}}$, z warunkiem periodyczności na funkcje wektorową $\bar{\mathbf{v}}$ i funkcję ciśnienia cieczy w porach p . Zgodnie z (7) układ równań, jaki spełniają w komórce periodyczności znormalizowane funkcje $\bar{\mathbf{v}}$ i p jest następujący:

$$\begin{aligned} \nabla_y^2 \bar{\mathbf{v}}^{(0)} - \text{grad}_y p^{(1)} - \text{grad}_x p^{(0)} &= \bar{\mathbf{0}}, \\ \text{div}_y \bar{\mathbf{v}}^{(0)} &= 0, \\ \bar{\mathbf{v}}_{\Gamma}^{(0)} = 0, \quad [\bar{\mathbf{v}}^{(0)}] &= 0, \quad [p^{(1)}] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Powyższy układ równań (11) z uwzględnieniem periodyczności warunków brzegowych sprowadza się ostatecznie do rozwiązania układu równań dla przypadku, gdy zewnętrzna siła działa w kierunku osi y_1 :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial p}{\partial y_1} + \nabla^2 (u) &= 1, \\
 -\frac{\partial p}{\partial y_2} + \nabla^2 (v) &= 0, \\
 -\frac{\partial p}{\partial y_3} + \nabla^2 (w) &= 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial y_3} &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Odpowiednio, aby określić wszystkie wartości tensora przepuszczalności, należy rozwiązać powyższy układ równań dla przypadków, gdy siła działa w kierunku y_2 i y_3 . Ponadto przyjęto oznaczenia: u, v, w są składowymi wektora prędkości przepływu, y_1, y_2, y_3 są współrzędnymi w lokalnym układzie współrzędnych.

Powyższy układ równań uzupełniają warunki brzegowe na kontakcie ciało stałe – ciecz: $u|_{\Gamma} = 0, v|_{\Gamma} = 0, w|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ oraz warunki periodyczności na kontaktach ciecz – ciecz pomiędzy komórkami periodyczności: $[u] = 0, [v] = 0, [w] = 0, [p] = 0$. Wstawienie układu równań do procedur obliczeń metodą elementów skończonych prowadzi do wyniku negatywnego wynikającego z faktu, że macierz sztywności jest osobliwa i zadanie jest niemożliwe do rozwiązania.

Aby pokonać tę trudność, można na podstawie prac [3, 7] zastąpić w układzie równań (11) równanie $\text{div}_y \bar{v}^{(0)} = 0$ równaniem $\nabla^2 p = 0$. Wprowadzenie tego równania w miejsce równania ciągłości przepływu z dodatkowym warunkiem zamykającym: $\int_{\Omega_f} p d\Omega = 0$ daje układ

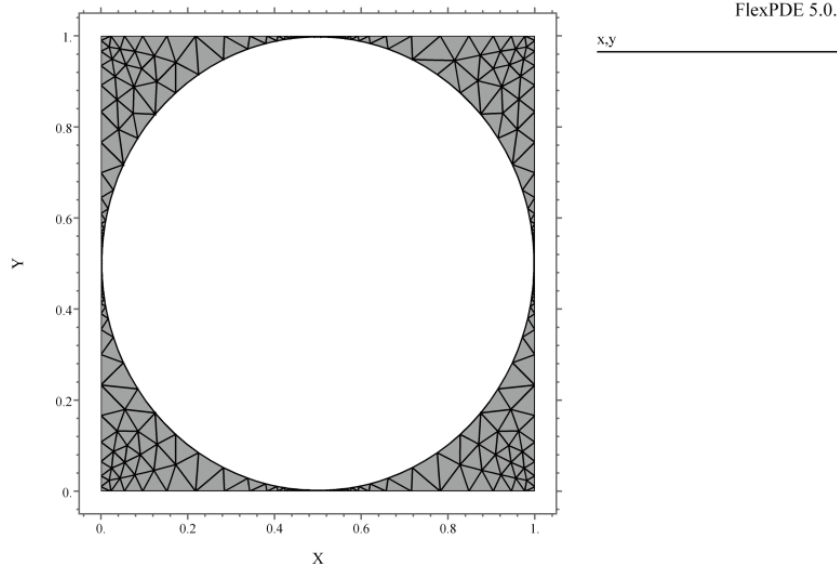
równań ekwiwalentny do układu równań (11).

Powyższe zagadnienie brzegowe rozwiązano przyjmując komórkę dwuwymiarową w układzie y_1 i y_2 oraz komórkę trójwymiarową w układzie współrzędnych y_1, y_2, y_3 .

Przyjmując komórkę sześcienną szerokości bezwymiarowej 1, wykonano obliczenia dla prostego przypadku położenia w przekroju fazy stałej w postaci walca położonego centrycznie w kierunku osi y_3 . Rozważono dwa przypadki obliczeniowe: przypadek przestrzenny i przypadek płaski w płaszczyźnie prostopadłej do osi y_3 . Siatkę elementów skończonych wygenerowaną przez program Flex PDE v.5 dla obu przypadków obliczeniowych przedstawiono na rysunku 2.

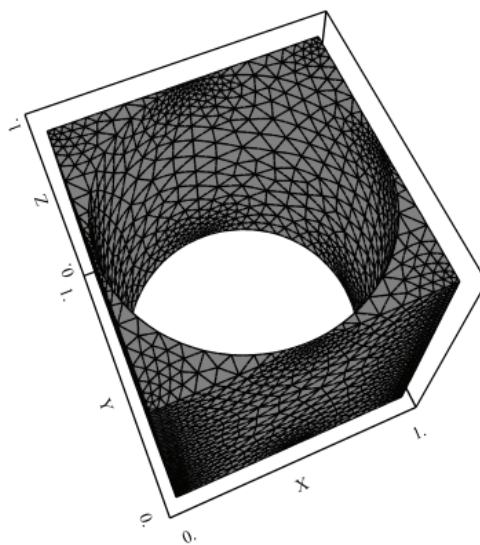
a) PERIODIC BOUNDARY TEST

13:42:43 1/5/08
FlexPDE 5.0.7



Periodic do obróbki filtr3: Grid#1 p2 Nodes=1250 Cells=454 RMS Err= 8.2e-4
Stage 1

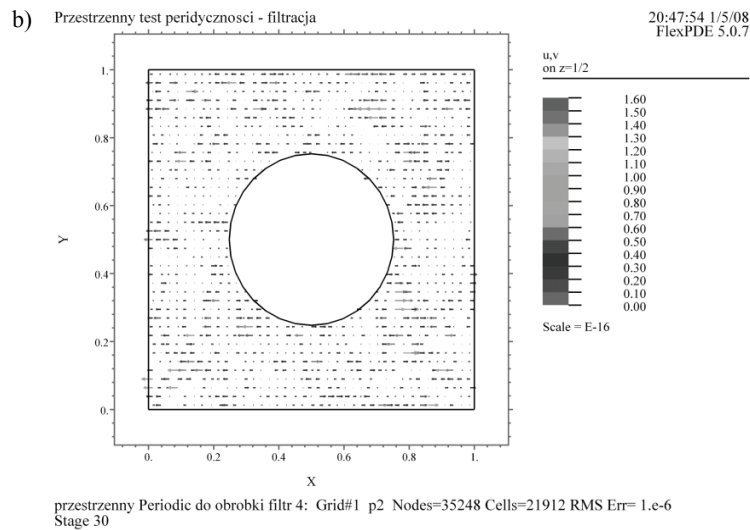
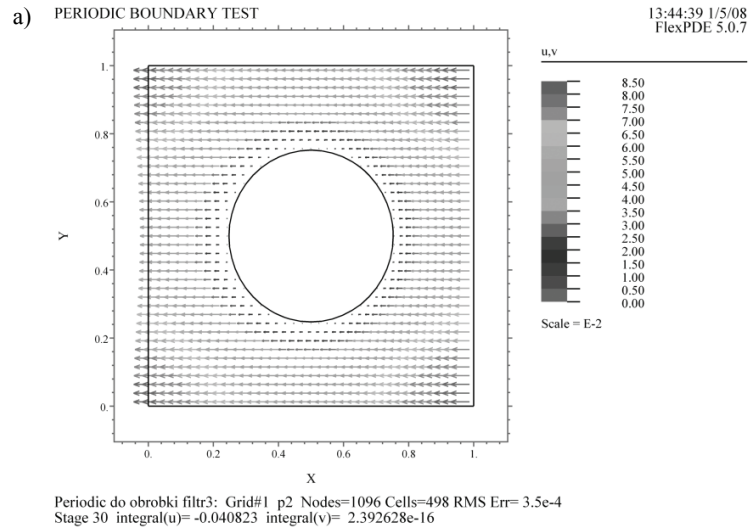
b)



Rys. 2. Siatka elementów skończonych dla $f=0,23$:

a) w przypadku zagadnienia płaskiego, b) w przypadku zagadnienia przestrzennego

Na rysunku 3 przedstawiono rozkład prędkości filtracji w rozpatrywanych przypadkach obliczeń.



Rys. 3. Pole wektorowe prędkości filtracji w komórce: dla porowatości $f = 0,5$ dla przypadku:
a) dla przypadku płaskiego, b) dla przypadku przestrzennego dla $y_3 = 0,5$

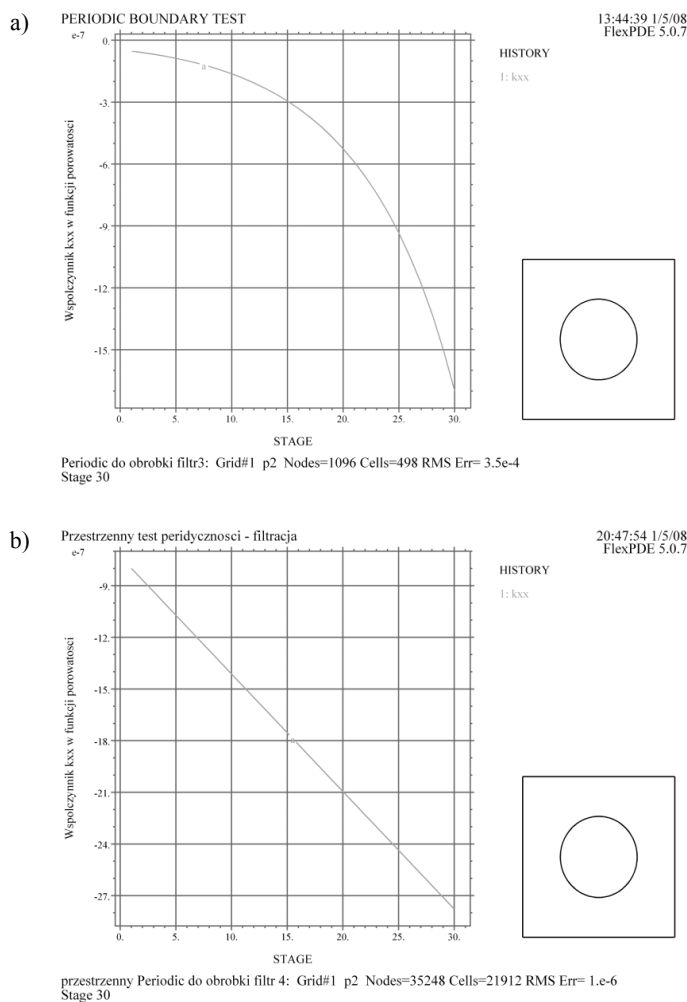
Obliczony tensor przepuszczalności Darcy'ego ma dla przypadku zagadnienia płaskiego postać $\langle \tilde{k}_{ij}^f \rangle$ dla porowatości $f = 0,5$:

$$k_{ij}^f = \begin{vmatrix} 3,101 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 0 & 3,101 \cdot 10^{-7} \end{vmatrix}$$

natomiast dla odpowiadającego przypadkowi płaskiemu zagadnienia przestrzennego:

$$k_{ij}^f = \begin{vmatrix} 1,76 * 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 1,76 * 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 1,76 * 10^{-6} \end{vmatrix}$$

W obydwu przypadkach obliczeniowych przeanalizowano zmianę znaczących wartości współczynników filtracji k_{11}^f w zakresie porowatości od $f=0,23$ do $f=0,8$ dla przypadku płaskiego i przestrzennego i przedstawiono je na rysunku 4.



Rys. 4. Wykres zmian współczynnika k_{11} dla przypadku: a) rozwiązania płaskiego, b) przestrzennego

Dla przypadku przestrzennego analizowano ponadto ewolucję zmian k_{33}^f w tym samym zakresie zmian porowatości. We wszystkich wykresach wartości zmian porowatości zostały wykonane w zależności od skali 1:30, gdzie jeden element skali odpowiada zmianie porowatości o wartość 0,019.

3. Wnioski

Przeprowadzone symulacje komputerowe obliczeń współczynnika filtracji dla przyjętego prostego schematu zagadnienia komórki periodycznej w oparciu o teorię asymptotycznej homogenizacji pozwalają wysnuć kilka ogólnych wniosków:

- 1) wartości obliczeniowe współczynników filtracji dla komórki i przyjętej wielkości brzegu 10^{-5} m odpowiadają tabelarycznym wielkościom współczynnika filtracji dla piaskowca,
- 2) istnieją różnice w wartościach obliczeniowych współczynników filtracji dla przypadku płaskiego i przestrzennego, ale wartości współczynników są tego samego rzędu wielkości,
- 3) zależność zmian współczynnika filtracji od porowatości ma w przypadku komórki 2D charakter wyraźnie nieliniowy, natomiast w przypadku komórki 3D *quasi*-liniowy,
- 4) przyjmując, że bardziej wiarygodne są wyniki dla przypadku zadania trójwymiarowego, to biorąc pod uwagę aspekt trudności w tworzeniu numerycznego modelu 3D ten sam rząd wielkości obliczeniowych współczynników filtracji uzyskanych dla obydwu przypadków pozwala stwierdzić, że stosowanie płaskiego modelu obliczeniowego może być wystarczające w przypadku izotropowych ośrodków gruntowych,
- 5) korzystając z wyników obliczeń modelu 2D należałoby, moim zdaniem, przyjmować liniową zależność wartości k_{ij}^f od porowatości.

LITERATURA

- [1] *Auriault J.L., Sanchez-Palencia E.*: Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable, *J. de Mécanique*, vol.16, 4, 1977, s. 575–603
- [2] *Auriault J.L.*: Dynamic Behaviour of a Porous Medium Saturated by a Newtonian Fluid. *Int. J. Engng. Sc.*, vol. 18, 1980, s. 775–785
- [3] *Bauer J., Kaczmarek J., Strzelecki T.*: Uwagi o macierzach sztywności materiału objętościowo-nieściśliwego, *Prace Nauk. Inst. Geot. i Hydr. Pwr.* nr 63/Konf, Wrocław, 1992, s. 5–12
- [4] *Bensoussan A., Lions J.L.*: Papanicolaou G, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978
- [5] *Ene H.I., Sanchez-Palencia E.*: Equations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans un modèle de milieu poreux, *Journal de Mécanique*, 14, 1, 1975, s. 73–108
- [6] *Łydźba D.*: Zastosowanie metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skał. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2002 (rozprawa habilitacyjna)
- [7] *Strzelecki T. (red.) i in.*: *Mechanika ośrodków niejednorodnych, Teoria homogenizacji*. Wrocław, Wydawnictwo DWE 1996
- [8] FLEX PDE 5, v5.0.7, "FlexPDE Reference", 2006 (<http://www.pdesolutions.com>)