

*Bogumił Wrana**, *Bartłomiej Czado**

IDENTYFIKACJA TŁUMIENIA W GRUNCIE

1. Wstęp

Najczęściej w modelowaniu tłumienia konstrukcji stosowany jest model tłumienia wi-skotycznego o współczynniku proporcjonalnym do prędkości. Identyfikacja współczynni-ków tłumienia prowadzona jest najczęściej za pomocą metody modalnej, która związana jest z rozwiązaniem równania różniczkowego jednorodnego ruchu konstrukcji o N stopniach swobody:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = 0 \quad (1)$$

gdzie:

\mathbf{M} , \mathbf{C} i \mathbf{K} — macierze o rozmiarach $N \times N$ kolejno: mas, tłumienia i sztywności,
 $\ddot{\mathbf{y}}(t)$, $\dot{\mathbf{y}}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ — wektory o rozmiarach $N \times 1$ kolejno przyspieszeń, prędkości i prze-mieszczeń.

Typowa procedura wyznaczania współczynników tłumienia konstrukcji za pomocą metody modalnej składa się z następujących kroków [1]:

1. Wyznaczanie funkcji transmitancji $H_{ij}(\omega)$ w ustalonych stopniach swobody konstrukcji.
2. Określenie częstości kołowych ω_k metodą dopasowania biegunów.
3. Określenie połowy szerokości modalnego pasma $\Delta\omega_k$ na podstawie funkcji rezonanso-wej, a następnie określenie modalnego współczynnika tłumienia krytycznego ze wzoru $\xi_k = \Delta\omega_k / 2\omega_k$.
4. Wyznaczanie modalnego współczynnika amplitudy a_k w celu określenia postaci mo-dalnej \mathbf{z}_k .
5. Rekonstrukcja funkcji transmitancji w celu weryfikacji dokładności uzyskanych wyni-ków.

* Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska, Kraków

Należy dodać, że powyższa procedura nie pozwala na otrzymanie informacji o przestrzennym rozkładzie tłumienia.

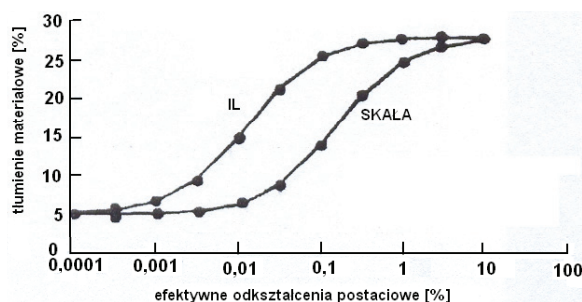
Wielu badaczy podejmuje próbę określenia współczynników pełnej macierzy tłumienia z wyników pomiarów drgań konstrukcji.

Metody te można podzielić na dwie grupy:

- 1) identyfikacja tłumienia na podstawie wyników analizy modalnej [2, 4],
- 2) bezpośrednia identyfikacja współczynników tłumienia na podstawie odpowiedzi konstrukcji na wymuszenie harmoniczne [3, 5].

Powyższe metody bazują na założeniu o wiskotycznym mechanizmie tłumienia konstrukcji.

W obszarach gruntu tłumienie zależy od poziomu odkształceń. Dla małych odkształceń występuje tłumienie proporcjonalne do prędkości, natomiast dla dużych odkształceń tłumienie jest nieproporcjonalne do prędkości odkształceń (por. rys. 1).



Rys. 1. Tłumienie w gruntach

2. Obliczanie tłumienia za pomocą transformaty falkowej

Rozważane jest równanie ruchu układu SDOF przy wymuszeniu siłą harmonicznie zmienną w postaci:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = F_s \sin pt + F_c \cos pt. \quad (2)$$

gdzie:

- p — częstość kołowa wzbudzenia,
- F_s, F_c — składowe amplitudy siły wymuszającej.

Całkowita odpowiedź układu będzie sumą drgań swobodnych oraz drgań wymuszonych:

$$q(t) = (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) \cdot e^{-\xi \omega t} + \rho \frac{F_s}{k} \sin(pt - \phi) + \rho \frac{F_c}{k} \cos(pt - \phi) \quad (3)$$

Ponieważ amplitudy drgań swobodnych zanikają w czasie, to można je pominąć w rozważaniach i rozważać tylko wpływ drgań wymuszonych.

Wartość:

$$\rho(\xi, \beta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (4)$$

nazywamy współczynnikiem wzmocnienia, współczynnikiem zwielokrotnienia amplitudy drgań lub *współczynnikiem dynamicznym*, gdzie $\beta = \frac{\omega}{p}$ (rys. 2).

Maksymalna wartość ρ_{max} wynosi:

$$\rho_{max}(\xi, \beta) = \rho_{max}(\xi, \sqrt{1-2\xi^2}) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (5)$$

Współczynnik tłumienia krytycznego ξ w przypadku wymuszenia siłą harmonicznie zmienną wyznacza się tzw. metodą rezonansową, czyli badaniem wielkości amplitud przemieszczeń przy powolnym wzroście częstotliwości wymuszenia. Przy zbliżaniu się częstości wymuszenia p do częstości własnej $p \sim \omega$ amplitudy przemieszczeń rosną, a po przekroczeniu maleją. Współczynnik tłumienia krytycznego wyznacza się przy znanych dwóch parametrach $\beta_1 = \frac{\omega_1}{p}$ i $\beta_2 = \frac{\omega_2}{p}$ (przed rezonansem i po rezonansie), dla których amplitudy przemieszczeń wynoszą:

$$\rho(\xi, \beta) = \frac{\rho_{max}(\xi, \beta)}{\sqrt{2}} \quad \text{lub} \quad \rho^2(\xi, \beta) = \frac{\rho_{max}^2(\xi, \beta)}{2} \rightarrow \beta_1 \text{ i } \beta_2$$

Poszukujemy wartości (β_1, β_2) na przecięciu $\frac{\rho_{max}(\xi)}{\sqrt{2}}$ i $\rho(\xi, \beta)$ (por. rys. 1):

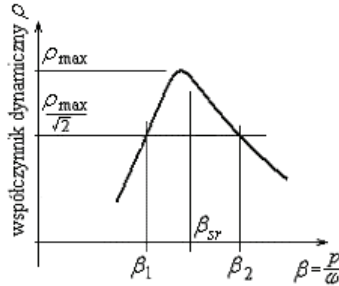
$$\frac{\rho_{max}(\xi)}{\sqrt{2}} = \rho(\xi, \beta), \quad (6a)$$

lub

$$\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = 2\sqrt{2}\xi\sqrt{1-\beta^2} \quad (6b)$$

Po wyznaczeniu β_1 i β_2 współczynnik tłumienia krytycznego określony jest wzorem:

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} = \xi \quad \text{lub} \quad \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1} = \xi \quad (7)$$



Rys. 2. Metoda połowy pasma dla SDOF

Jeśli w sygnale występują zmiany częstotliwości w czasie, to korzystnie jest rozważanie zmian energii zarówno w dziedzinie częstotliwości, jak i w czasie.

Zastosowanie praktyczne tej koncepcji w analizie sygnału podał Gabor w 1946 i Wille w 1948, a następnie rozwinął je Carmona i in. (1998) oraz Mallat (1998). Grossman i Morlet w 1984 zaproponowali falkę jako funkcję okna i transformaty Fouriera:

$$g(t) = e^{-|t|/2} e^{j2\pi f_0 t} = e^{-|t|/2} [\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)] \quad (8)$$

gdzie funkcje trygonometryczne kosinus i sinus oscylują wokół częstotliwości centralnej f_0 . Część trygonometryczna pozwala na lokalizację efektywnych częstotliwości w sygnale. Transformata Fouriera falki Morleta wynosi:

$$G(af) = \sqrt{2} \sqrt{\pi} e^{-2\pi^2 (af - f_0)^2} \quad (9)$$

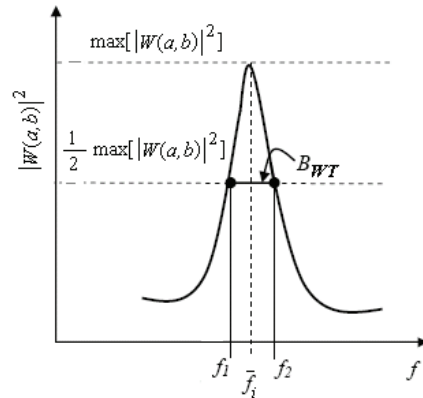
Relacja między współczynnikiem skali a a częstotliwością f jest określona wzorem:

$$a = \frac{f_0}{f} \quad (10)$$

W tym przypadku obliczenia współczynnika tłumienia krytycznego ξ wyznacza się za pomocą transformaty falkowej sygnału przemieszczeń d_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Posługuje się tu metodą rezonansową, czyli badaniem wielkości amplitud przemieszczeń przy powolnym wzroście częstotliwości wymuszenia. Współczynnik tłumienia krytycznego (rys. 3) wyznacza się przy znanych dwóch częstotliwościach wymuszenia ω_1 i ω_2 (przed rezonansem i po rezonansie), dla których kwadrat modułu transformaty falkowej przemieszczeń wynosi:

$$|W(t, \omega)|^2 = \frac{\max |W(t, \omega)|^2}{2} \rightarrow \omega_1 \text{ i } \omega_2 \quad (11)$$

gdzie t to chwila czasowa, przy której występuje zjawisko rezonansu (występuje maksymalna wartość przemieszczeń).



Rys. 3. Metoda połowy pasma przy zastosowaniu transformaty falkowej

Współczynnik ξ obliczamy ze wzoru:

$$\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{4\pi} \approx \xi \quad (12)$$

gdzie współczynnik 4π to pole powierzchni komórki Heisenberga,

$$dt * df = 4\pi \quad (13)$$

gdzie:

dt — wymiar komórki na osi czasu,

df — wymiar komórki na osi częstotliwości.

W celu zwiększenia dokładności obliczeń wprowadzono obliczenia stosując wagę $\frac{|W(t, f_r)|^2}{W_{\max}}$, aby uwzględnić przejście przez rezonans o częstotliwości f_r :

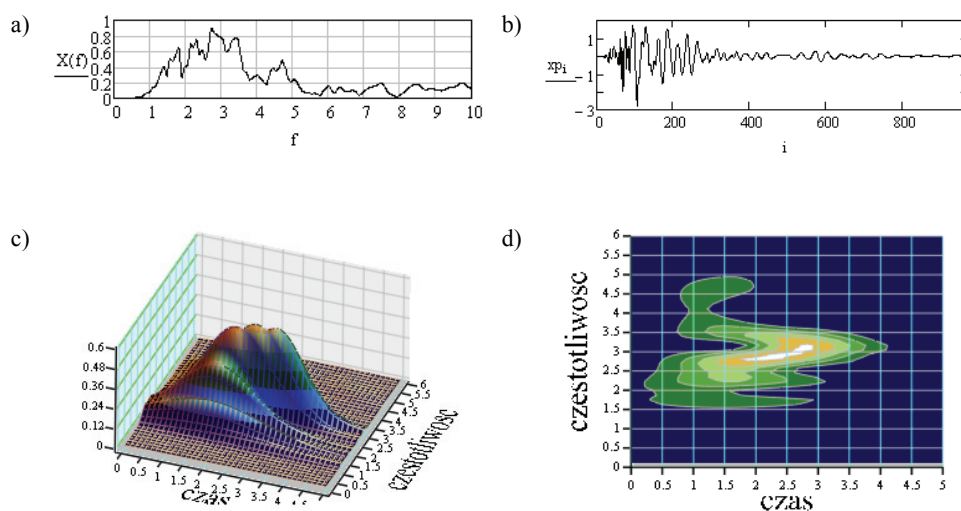
$$\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{4\pi} \frac{|W(t, f_r)|^2}{W_{\max}} \quad (14)$$

Zaletą obliczeń metodą transformaty falkowej to możliwość obliczeń chwilowego tłumienia przy przejściu przez każdy chwilowy rezonans, co nie jest możliwe przy zastosowaniu transformaty Fouriera.

3. Przykład obliczania tłumienia przy zastosowaniu transformaty falkowej

Rozważane jest zagadnienie wyznaczania tłumienia w gruncie przy zastosowaniu transformaty falkowej. Czujnik przyspieszenia znajdował się na powierzchni gruntu niespoitego (piaski średnio zagęszczone) i mierzył przyspieszenia wywołane eksploatacją górnictw przez odstrzały w kopalni Szombierki. Na jednej kostce pomiarowej znajdował się jeden czujnik, który rejestrował przyspieszenia pionowe oraz drugi czujnik, rejestrujący przyspieszenia poziome. Do dalszych obliczeń stosowano przemieszczenia, które otrzymano przez podwójne całkowanie sygnału po czasie.

Na rysunku 4 przedstawiono analizę przemieszczeń poziomych: przebieg przemieszczeń w czasie, jego transformatę Fouriera oraz wykres kwadratu modułu transformaty falkowej w postaci wykresu trójwymiarowego i mapy falkowej.



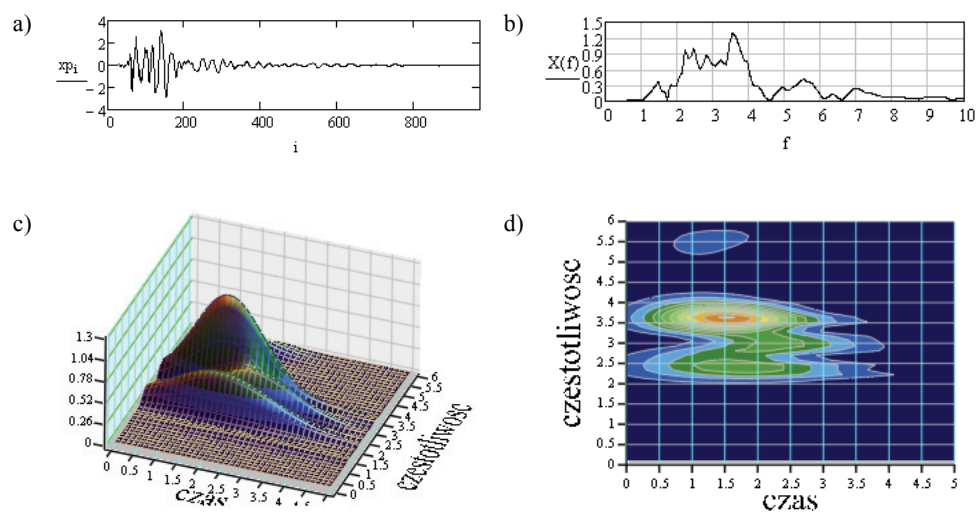
Rys. 4. Obliczanie tłumienia metodą połowy pasma: a) przemieszczenie w czasie w kierunku poziomym, b) transformata Fouriera, c) wykres kwadratu modułu transformaty falkowej, d) mapa falkowa modułu transformaty falkowej

W tabeli 1 podano wartości współczynnika tłumienia krytycznego w zakresie od 2,5 do 3,2 Hz. Natomiast na rysunku 5 przedstawiono analizę przemieszczeń pionowych: przebieg przemieszczeń w czasie, jego transformatę Fouriera oraz wykres kwadratu modułu transformaty falkowej w postaci wykresu trójwymiarowego i mapy falkowej. Podczas drgań w kierunku pionowym zaobserwowano przejście przez rezonans dla częstotliwości 3,6 Hz. Wartość tłumienia wyznaczona metodą połowy pasma dla tej częstotliwości wynosi 4,8%.

TABELA 1

Wartości współczynnika tłumienia krytycznego dla częstotliwości od 2,5 do 3,2 Hz

f [Hz]	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2
ξ [%]	8,7	9,8	11,2	5,1	6,3	9,1	8,3	8,6



Rys. 5. Obliczanie tłumienia metodą połowy pasma: a) przemieszczenie w czasie w kierunku pionowym, b) transformata Fouriera, c) wykres kwadratu modułu transformaty falkowej, d) mapa falkowa modułu transformaty falkowej

4. Wnioski i uwagi końcowe

W artykule przedstawiono metodę wyznaczania tłumienia w obszarze gruntu przy zastosowaniu transformaty falkowej. Proponowana metoda pozwala na wyznaczanie tłumienia chwilowego na podstawie zarejestrowanego przebiegu drgań w nieliniowym ośrodku gruntowym jako sygnału niestacjonarnego.

W konstrukcjach budowli naziemnych, żelbetowych lub stalowych zazwyczaj stosowana jest metoda modalna, przy założeniu liniowego zachowania się konstrukcji, wyznaczania globalnego współczynnika tłumienia, która ma ograniczone zastosowanie do obszaru gruntu.

LITERATURA

- [1] Adhikari S., Woodhouse J.: Identification of damping: Part 1, Viscous damping, Journal of Sound and Vibration, 243(1), 2001, 43–61

- [2] *Alvin K.F., Peterson L.D., Park K.C.*: Extraction of normal modes and full modal damping from complex modal parameters. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 35, 1997, 1187–1194
- [3] *Baruch M.*: Identification of the damping matrix., Technical Report 1AE No. 803 Technion, Israel Faculty of Aerospace Engineering, Israel Institute of Technology, Haifa, 1997
- [4] *Hasselsman T.K.*: A method of constructing a full modal damping matrix from experimental measurements. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 10, 1972, 526–527
- [5] *Mottershead J.E.*: Theory for the estimation of structural vibration parameters from incomplete data. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 28, 1990, 559–561
- [6] *Wrana B., Ruchala P.*: Identification of Damping by Means of Wavelets in Intelligent Structures, 3rd International Congress on Intelligent Building Systems InBus 2004, Cracow University of Technology, 2004, 249–254
- [7] *Wrana B., Ruchala P.*: Application of Wavelets to Identification of Damping of Structures, Proceeding of CMM-2005 Computer Methods in Mechanics, 2005