Górnictwo i Geoinżynieria • Rok 32 • Zeszyt 3 • 2008

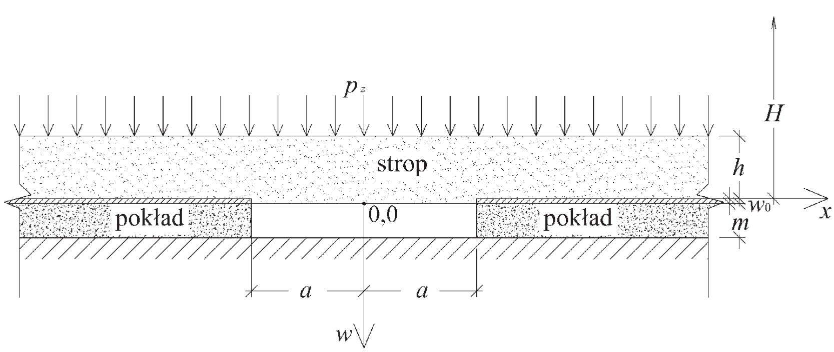
*Marian Paluch*, Antoni Tajduś**

# WYZNACZENIE UGIĘĆ I SIŁ PRZEKROJOWYCH W STROPIE BĘDĄCYM W KONTAKCIE DWUPARAMETROWYM Z POKŁADEM DLA WYROBISKA KORYTARZOWEGO

W pracy rozważane są analogiczne zagadnienia jak te, które autorzy przedstawili w opracowaniu [9]. W artykule rozważane są te zagadnienia odnośnie do wyrobiska korytarzowego. Problem ten jest zadaniem statycznie niewyznaczalnym. Wykorzystując symetrię układu jako niewiadomą nadliczbową w układzie podstawowym, przyjęto moment zginający $\overline{M}_0$. Po jego wyznaczeniu podano wzory na obliczenie ugięć i sił przekrojowych w stropie. Wyznaczono również energię sprężystą dla długości $a$ stropu. Wymiar $a$ został dobrany z hipotezy wytężeniowej Coulomba–Tresci–Guesta

## 1. Wstęp

Rozważamy pasmo płytowe stropu o grubości $h$ [m] znajdujące się na głębokości $H$ [m] i obciążone ciśnieniem $p_z = \gamma H \; [N/m^2]$ (rys. 1)



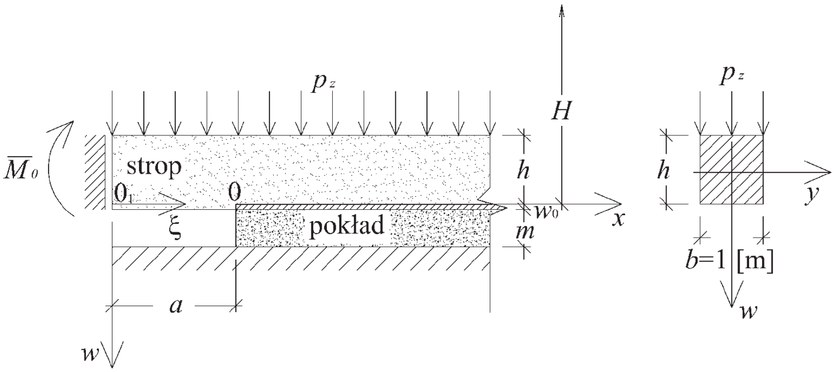

**Rys. 1.** Wyrobisko korytarzowe

* Katedra Geomechaniki, Budownictwa i Geotechniki – Wydział Górnictwa i Geoinżynierii AGH

Pomiędzy stropem a pokładem jest kontakt dwuparametrowy typu Wieghardta

$$r(x,y) = cw(x,y) - c_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

Układ podstawowy, przyjęty do obliczeń, przedstawia rysunek 2.




**Rys. 2.** Schemat statyczny

## 2. Część obliczeniowa

Dla części stropu z przedziału $0 \le \xi \le a$ możemy napisać:

$$\begin{cases} EJw''(\xi) = -M(\xi) = \dfrac{p_z \xi^2 b}{2} - \overline{M}_0 \\ EJw'''(\xi) = -Q(\xi) = p_z \xi b \\ EJw'(\xi) = \overline{A}_1 + \dfrac{p_z \xi^3}{6} b - \overline{M}_0 \xi \\ EJw(\xi) = \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \xi + \dfrac{p_z \xi^4 b}{24} - \dfrac{\overline{M}_0 \xi^2}{2} \end{cases} \tag{2}$$

Ponieważ $w'(\xi = 0) = 0$, to stała $\overline{A}_1$ jest równa zero. Stała $\overline{A}_2$ i nieznany moment $\overline{M}_0$ będą wyznaczone z warunków zszycia w punkcie $\xi = a \Leftrightarrow x = 0$.

I tak:

$$\begin{cases} M(\xi = a) = -\dfrac{p_z a^2 b}{2} + \overline{M}_0 \\ Q(\xi = a) = -p_z ab \\ w'(\xi = a) = \left(\dfrac{p_z a^3 b}{6} - \overline{M}_0 a\right)\dfrac{1}{EJ} \\ w(\xi = a) = \left(\overline{A}_2 + \dfrac{p_z a^4 b}{24} - \dfrac{\overline{M}_0 a^2}{2}\right)\dfrac{1}{EJ} \end{cases} \tag{3}$$

Dla części stropowej $0 \le x < \infty$ otrzymaliśmy równanie różniczkowe czwartego rzędu niejednorodne (por. [9]) na wyznaczenie ugięć stropu

$$\left(1+\frac{c_1 kb}{GF}\right)w^{IV}(x)-\left(\frac{bc_1}{EJ}+\frac{ckb}{GF}\right)w''(x)+\frac{bc}{EJ}w(x)=\frac{b}{EJ}p_z \tag{4}$$

W równaniu (4) oznaczono:

- $GF$ — sztywność belki na ścinanie [Nm$^2$],
- $EJ$ — sztywność belki na zginanie [Nm$^2$],
- $c$ — współczynnik oporu właściwego podkładu [N/m$^3$],
- $c_1$ — siła naciągu membrany [N/m],
- $b$ — szerokość belki [m],
- $k$ — stała zależna od kształtu poprzecznego belki dla przekroju poprzecznego $k$ = 1, 2.

Równanie charakterystyczne, odpowiadające równaniu jednorodnemu, ma pierwiastki:

a) $\Delta > 0 \Leftrightarrow \psi > 1$

$$r_{1,2} = \pm\beta\sqrt{\psi-\sqrt{\psi^2-1}} \tag{5}$$
$$r_{3,4} = \pm\beta\sqrt{\psi+\sqrt{\psi^2-1}}$$

b) $\Delta = 0 \Leftrightarrow \psi = 1$

$$r_{1,3} = \beta \tag{6}$$
$$r_{2,4} = -\beta$$

c) $\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \psi < 1$

$$r_{1,2} = \pm\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\psi}-i\sqrt{1-\psi}\right)$$
$$r_{3,4} = \pm\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\psi}+i\sqrt{1-\psi}\right)$$

gdzie: (7)

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{bcGF}{EJ(GF+bc_1 k)}}$$

$$\psi = \frac{b(c_1 GF + ckEJ)}{1\sqrt{bcGFEJ(GF+bc_1 k)}}$$

Całka szczególna równania (4) jest następująca

$$w_s(x) = \frac{p_z}{c} \tag{8}$$

Zatem

$$w(x)=\frac{p_z}{c}+A_1e^{r_1x}+A_2e^{r_2x}+A_3e^{r_3x}+A_4e^{r_4x} \tag{9}$$

Stałe $A_1$ i $A_3$ są równe zero, co wynika z warunku $x\to\infty$, $x(\infty)=\frac{p_z}{c}$.

Stałe $A_2$ i $A_4$ są wyznaczone z warunków:

$$\begin{cases} EJw''(x=0)=-M(x=0)=-M(\xi=a)=-\left(\frac{p_z a^2 b}{2}-\vec{M}_0\right) \\ EJw'''(x=0)=-Q(x=0)=-Q(\xi=a)=-(-p_z ab) \end{cases} \tag{10}$$

I tak dla:

a) $\psi>1$

$$w(x)=\frac{p_z}{c}+A_2e^{r_2x}+A_4e^{r_4x}$$

$$w'(x)=A_2r_2e^{r_2x}+A_4r_4e^{r_4x}$$

$$w''(x)=A_2r_2^2e^{r_2x}+A_4r_4^2e^{r_4x}$$

$$w'''(x)=A_2r_2^3e^{r_2x}+A_4r_4^3e^{r_4x}$$

$$\begin{cases} w''(0)=A_2r_2^2+A_4r_4^2=\frac{p_z a^2 b-2\overline{M}_0}{2EJ} \\ w'''(0)=A_2r_2^3+A_4r_4^3=\frac{p_z ab}{EJ} \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} A_2=\frac{1}{2r_2^2(r_4-r_2)EJ}[p_z a(abr_4-2b)-2\overline{M}_0r_4] \\ A_4=\frac{1}{2r_4^2(r_4-r_2)EJ}[p_z a(2b-abr_2+2\overline{M}_0r_2] \end{cases}$$

Ponieważ $w'(x=0)=w'(\xi=a)$, to stąd wyznaczono nieznany moment $\overline{M}_0$

$$\overline{M}_0=\frac{p_z a^2 b}{6}\left[1+\frac{2}{1+\frac{3-r_2r_4a^2}{(r_2+r_4)a-3}}\right] \tag{12}$$

Podstawiając (12) do (11), otrzymujemy wzory na ugięcie $w(x)$, kąt obrotu $\varphi(x)=w'(x)$, odpór podłoża $r(x)=cw(x)-c_1w''(x)$, moment zginający $M(x)=-EJw''(x)$, siłę tnącą $Q(x)=-EJw'''(x)$

b) $\psi = 1$

$$w(x) = \frac{p_z}{c} + (A_2 + A_4 x)e^{-\beta x}$$

$$w'(x) = [A_4 - \beta(A_2 + A_4 x)]e^{-\beta x}$$

$$w''(x) = \beta[-2A_4 + \beta(A_2 + A_4 x)]e^{-\beta x}$$

$$w'''(x) = \beta^2 [3A_4 - \beta(A_2 + A_4 x)]e^{-\beta x}$$

$$\begin{cases} w''(0) = \beta^2 A_2 - 2\beta A_4 = \dfrac{p_z a^2 b - 2\overline{M}_0}{2EJ} \\ w'''(0) = -\beta^3 A_2 + 3\beta^2 A_4 = \dfrac{p_z ab}{EJ} \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{p_z ab(3a\beta + 4) - 6\overline{M}_0\beta}{2\beta^2 EJ} \\ A_4 = \dfrac{p_z ab(a\beta + 2) - 2\overline{M}_0\beta}{2\beta^2 EJ} \end{cases}$$

$$w'(x=0) = w'(\xi = a) \Rightarrow \overline{M}_0 = \frac{p_z a^2 b}{6}\left[1 + \frac{2}{\dfrac{(a\beta + 2)\beta a}{a\beta + 3}}\right] \tag{14}$$

Również i w tym przypadku wstawiając (14) do (13), otrzymujemy wyznaczone interesujące nas wielkości.

c) $0 < \psi < 1$

$$\lambda = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\psi}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\psi}$$

$$w(x) = \frac{p_z}{c} + (A_2 \cos\gamma x + A_4 \sin\gamma x)e^{-\lambda x}$$

$$w'(x) = [(\gamma A_4 - \lambda A_2)\cos\gamma x - (\lambda A_4 + \gamma A_2)\sin\gamma x]e^{-\lambda x}$$

$$w''(x) = \{[(\lambda^2 - \gamma^2)A_2 - 2\lambda\gamma A_4]\cos\gamma x + [(\lambda^2 - \gamma^2)A_4 + 2\lambda\gamma A_2]\sin\gamma x\}e^{-\lambda x}$$

$$\begin{aligned} w'''(x) = -\{&[\lambda(\lambda^2 - 3\gamma^2)A_2 - \gamma(3\lambda^2 - \gamma^2)A_4]\cos\gamma x + \\ &+[\lambda(\lambda^2 - 3\gamma^2)A_4 + \gamma(3\lambda^2 - \gamma^2)A_2]\sin\gamma x\}e^{-\lambda x} \end{aligned} \tag{15a}$$

$$\begin{cases} w''(0) = (\lambda^2 - \gamma^2)A_2 - 2\lambda\gamma A_4 = \dfrac{p_z a^2 b - 2\overline{M}_0}{2EJ} \\ w'''(0) = -\lambda(\lambda^2 - 3\gamma^2)A_2 + \gamma(3\lambda^2 - \gamma^2)A_4 = \dfrac{p_z ab}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{1}{2(\lambda^2+\gamma^2)^2 EJ}\{p_z ab[(3\lambda^2-\gamma^2)a+4\lambda]-2(3\lambda^2-\gamma^2)\overline{M}_0\} \\ A_4 = \dfrac{1}{2\gamma(\lambda^2+\gamma^2)^2 EJ}\{p_z ab[(2(\lambda^2-\gamma^2)+\lambda(\lambda^2-3\gamma^2)a]-2\lambda(\lambda^2-3\gamma^2)\overline{M}_0\} \end{cases} \tag{15b}$$

$$w'(x=0)=w''(\xi=a)\Rightarrow \overline{M}_0 = \frac{p_z a^2 b}{6}\left[1+\frac{2}{\dfrac{(\lambda^2+\gamma^2)a^2+2\lambda a}{2\lambda a+3}}\right] \tag{16}$$

Wstawiając (16) do (15), otrzymujemy końcowe wzory na wyznaczenie ugięć $w(x)$, kąta obrotu $\varphi(x)=w'(x)$, odporu podłoża $r(x)=cw(x)-c_1 w''(x)$, momentu zginającego $M(x)=-EJw''(x)$ i siły tnącej $Q(x)=-EJw'''(x)$

## 3. Energia sprężysta połowy stropu nad wybranym węglem $0 \le \xi \le a$ (rys. 1)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2EJ}\int_0^a M^2(\xi)d\xi + \frac{1{,}2(1+v)}{6}\int_0^a Q^2(\xi)d\xi = \\ &= \frac{\overline{M}_0^2 a}{2EJ}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{p_z a^2 b}{\overline{M}_0}\right)+\frac{1}{20}\left(\frac{p_z a^2 b}{\overline{M}_0}\right)+\frac{1+v}{15}\left(p_z\frac{ahb}{\overline{M}_0}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{17}$$

Energia zmiany objętości

$$\begin{aligned} W_V &= \frac{1-2v}{6EJ}\int_0^a M^2(\xi)d\xi = \\ &= \frac{(1-2v)\overline{M}_0^2 a}{6EJ}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{p_z a^2 b}{\overline{M}_0}\right)+\frac{1}{20}\left(\frac{p_z a^2 b}{\overline{M}_0}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{18}$$

Energia zmiany postaci

$$\begin{aligned} W_f &= W - W_V = \\ &= \frac{1+v}{3EJ}\overline{M}_0^2 a\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{p_z a^2 b}{\overline{M}_0}\right)+\frac{1}{20}\left(\frac{p_z a^2 b}{\overline{M}_0}\right)^2+\frac{1}{10}\left(\frac{p_z ahb}{\overline{M}_0}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{19}$$

## 4. Obliczenie długości *a*

W pracy [9] autorzy wykazali, że do obliczenia długości granicznej stropu nad wybranym pokładem powinno się korzystać z hipotezy wytężeniowej największych naprężeń stycznych

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R_k \tag{20}$$

Z wzoru (20) wyznaczono

$$a_{gr} \leq \sqrt{\frac{27}{32}} \left( \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{16}{27} \frac{R_k}{p_z} \right)^2} - 1} \right) \cdot h \tag{21}$$

## 5. Przykład obliczeniowy

- miąższość węgla $m = 2{,}5$ m;
- moduł $E' = 3$ GPa;
- współczynnik oporu $c = \frac{E'}{m} = 1{,}2$ GPa/m;
- strop z łupku piaszczystego

  $h = 12$ m, $v = 0{,}3$,

  $E = \frac{E'}{1 - v^2} = 7$ GPa,

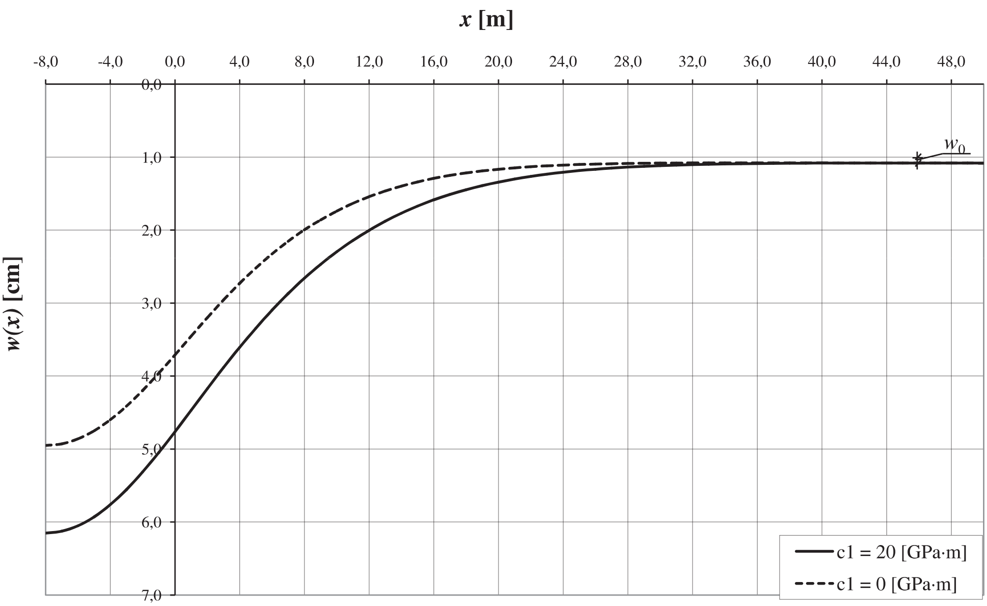
  $G = \frac{E}{2(1 + v)} = 2{,}7$ GPa,

  na głębokości $H = 500$ m,

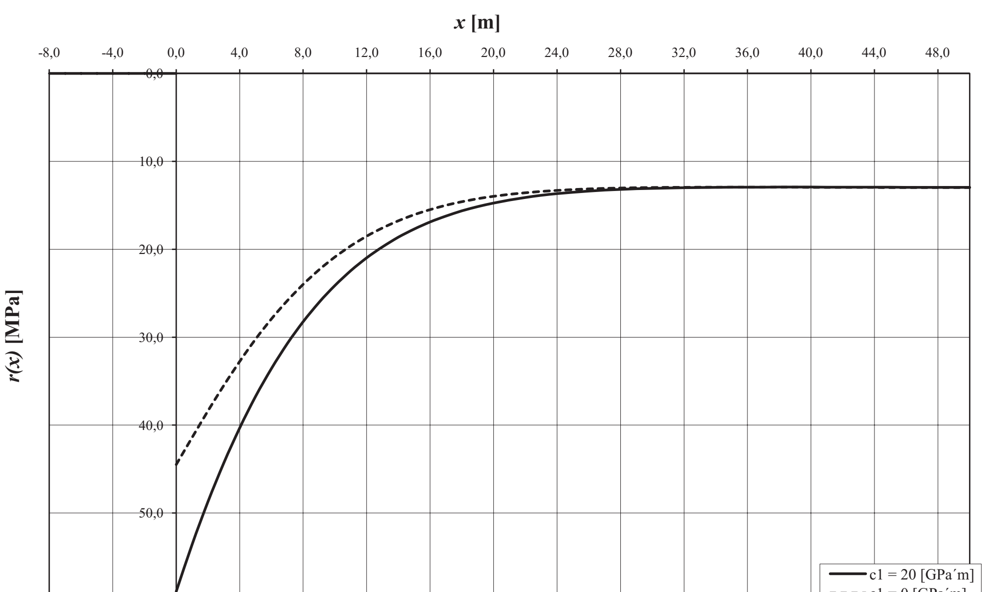
  ciśnienie $p_z = 13$ MPa;
- wymiar *a* wyznaczamy z hipotezy C-T-G $a_{gr} = 8{,}039$ m, przyjęto $a = 8$ m;
- siła naciągu $c_1 = 20$ GPa·m;
- wytrzymałość obliczeniowa $R_g R_K = 16$ MPa;
- szerokość belki stropowej $b = 1$ m.

Na rysunkach 3–6 podano rozwiązanie w formie graficznej. Są to wykresy przemieszczeń, odporu gruntu, momentu zginającego i siły tnącej.

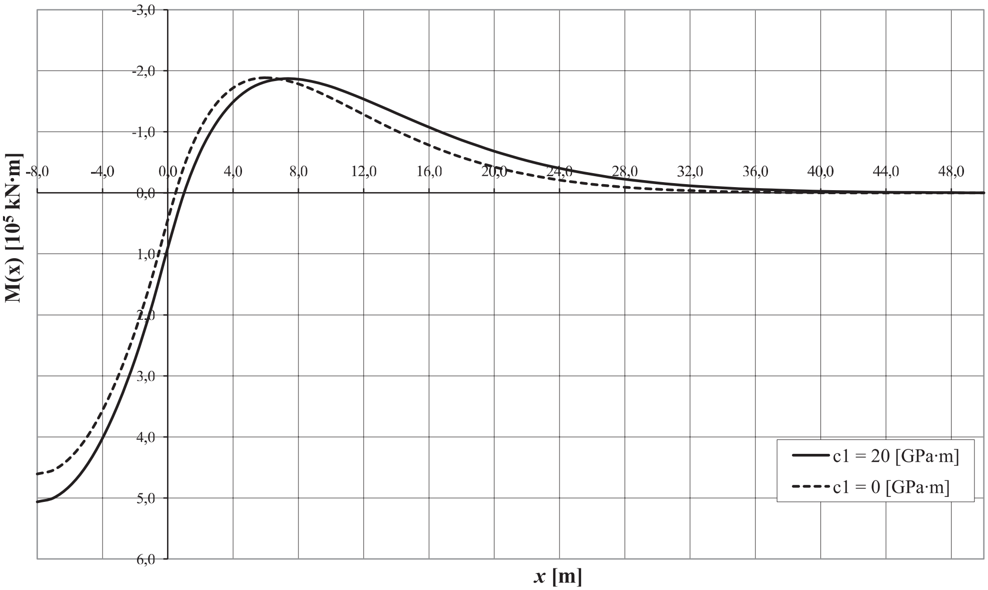
Linia ciągła odpowiada podłożu Wieghardta, przerywana zaś – podłożu Winklera



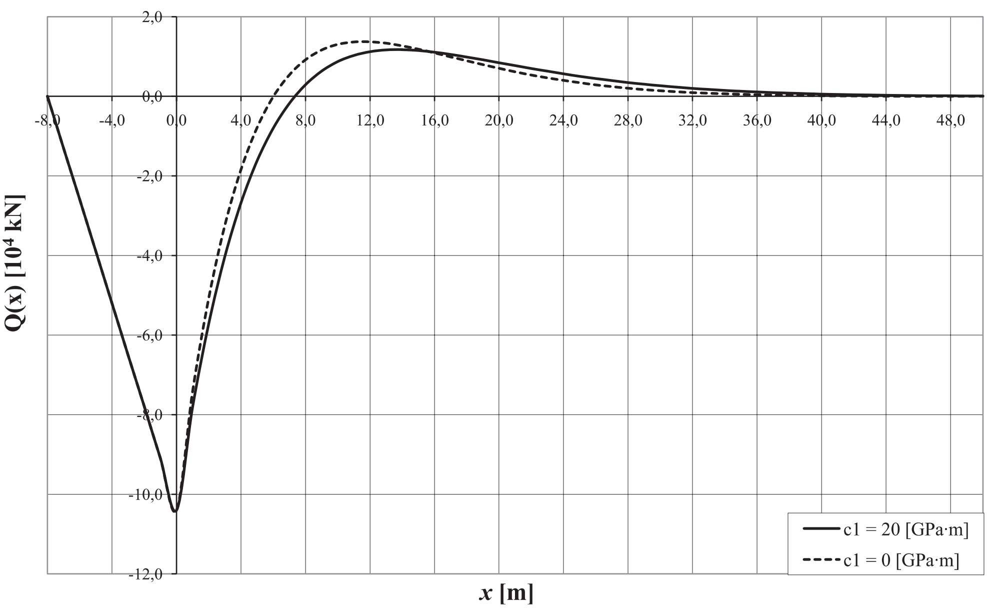

**Rys. 3.** Ugięcie podłoża




**Rys. 4.** Odpór podłoża




**Rys. 5.** Moment zginający




**Rys. 6.** Siła tnąca

# 6. Podsumowanie

W pracy pokazano, że nieklasyczny problem belki spoczywającej na podłożu dwuparametrowym typu Wieghardta ma ścisłe zamknięte rozwiązanie w klasie funkcji elementarnych. Ugięcie stropu dla podłoża dwuparametrowego jest większe niż dla podłoża Winklera. Widać wyraźną różnicę w wykresach sił przekrojowych co przemawia za podłożem dwuparametrowym.

LITERATURA


[1] *Cała M., Flisiak J., Tajduś A.:* Mechanizm współpracy kotwi z górotworem o zróżnicowanej budowie. Biblioteka Szkoły Eksploatacji Podziemnej. Seria z lampką górniczą. Nr 8, Kraków 2001

[2] *Derski W., Izbicki R., Kisiel I., Mróz Z.:* Mechanika skał i gruntów. PWN, Warszawa 1982

[3] Gałczyński S.: Podstawy budownictwa podziemnego. Oficyna Wyd. Pol. Wrocł., Wrocław 2001

[4] *Gryczmański M., Jurczyk P.:* Modele podłoża gruntowego. Inżynieria i Budownictwo, Nr 2/95, Warszawa 1995

[5] *Korman S.:* Wartości współczynników sprężystości w górotworze. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa, Kraków 1955

[6] *Krzyś W., Życzkowski M.:* Sprężystość i plastyczność. PWN, Warszawa 1962.

[7] *Ozog T.:* Ugięcie stropu przy uwzględnieniu sił ścinających. Zeszyty Problemowe Górnictwa. PAN, Vol. 3, Nr 1

[8] *Paluch M.:* Podstawy teorii sprężystości i plastyczności z przykładami. Wyd. P.K., Kraków 2006

[9] *Paluch M., Tajduś A.:* Analiza wytrzymałościowa stropu będącego w kontakcie dwuparametrowym z podkładem przy eksploatacji na zawał. Górnictwo i Geoinżynieria (Kwartalnik AGH), r. 32, z. 1, Kraków 2008.

[10] *Piechnik S.:* Mechanika techniczna ciała stałego. Wyd. P.K., Kraków 2007

[11] *Sałustowicz A.:* Zarys mechaniki górotworu. Wyd. „Śląsk”, Katowice 1968