

Dariusz Łydzba, Adrian Różański**

STATYSTYCZNA CHARAKTERYZACJA MIAR GEOMETRYCZNYCH MIKROSTRUKTUR LOSOWYCH: DEFINICJE, WŁAŚCIWOŚCI I ZASTOSOWANIA

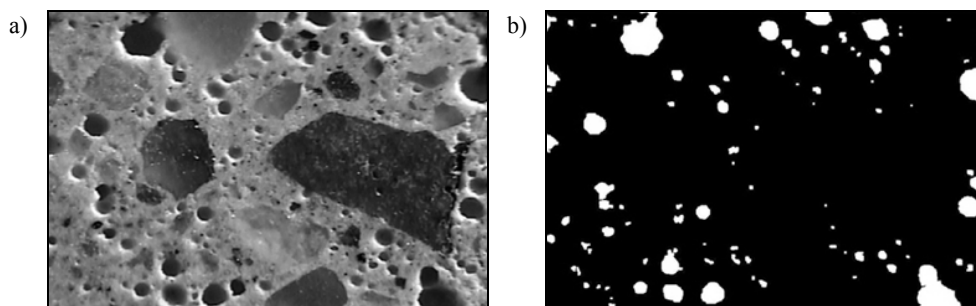
1. Wprowadzenie

W wielu dziedzinach nauki nowoczesne technologie wykorzystywane są do uzyskiwania cyfrowych obrazów badanych obiektów. Tomografia komputerowa, mikroskopy elektronowe, obrazowanie rezonansu magnetycznego, to tylko niektóre metody wykorzystywane w technice do badania materiałów o losowych strukturach. Metody te pozwalają na otrzymanie dwu- lub trójwymiarowych obrazów cyfrowych. Ponadto są to metody nieinwazyjne i nie powodują żadnych uszkodzeń badanych próbek.

Uzyskany z badania obraz cyfrowy może być na przykład w odcieniach szarości (ang. *greyscale*) i wówczas składa się on tylko z jednego kanału barwnego — czarnego i jego odcieni. Jeden piksel obrazu kodowany jest na ośmiu bitach i dlatego może być jednym z 256 rozmaitych odcieni szarości, od bieli do czerni. W przypadku ośrodków dwuskładnikowych obraz może zostać w prosty sposób zredukowany do obrazu binarnego poprzez operację progowania (ang. *thresholding*). Wówczas obraz składa się z samych zer bądź jedynek, którym przypisuje się jakiś kolor, np. czarny i biały. Ta sama procedura stosowana może być również do materiałów wieloskładnikowych. Na rysunku 1 przedstawiono obraz cyfrowy przekroju przez próbkę betonu wykonany w odcieniach szarości (rys. 1a) oraz, w celu wyodrębnienia pustek powietrznych, ten sam obraz po operacji progowania (rys. 1b).

Osobnym, bardzo ważnym problemem z punktu widzenia mechaniki, jest charakterystyka statystyczna geometrii materiału z ich obrazów rzeczywistych. Sprowadza się ona do określania odpowiednich miar mikrostruktur (funkcji korelacji), które następnie wykorzystywane są do tworzenia oszacowań dla wartości poszukiwanych parametrów efektywnych [6, 9, 11, 14], określania wielkości reprezentatywnej elementarnej objętości (REO) [6, 14] oraz do matematycznej rekonstrukcji geometrii materiałów [4, 11].

* Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska, Wrocław



Rys. 1. Obraz cyfrowy betonu [8]:
a) obraz w odcieniach szarości; b) obraz binarny

W przypadku oszacowań wartości parametrów efektywnych najczęściej używaną funkcją korelacji jest prawdopodobieństwo n -punktowe wyznaczane dla jednego ze składników kompozytu. Jeśli zaś chodzi o procedury matematycznej rekonstrukcji to wykorzystuje się, oprócz prawdopodobieństwa n -punktowego, miarę zwaną „*lineal-path*” [12, 13].

Niniejsza praca prezentuje i omawia, przez rozważenie przykładowych mikrostruktur, podstawowe własności wymienionych powyżej miar mikrostrukturalnych oraz proponuje metodologię ich określania, przez wykorzystanie metody Monte Carlo. Zwraca również uwagę na możliwe zastosowanie tych miar do oceny minimalnego wymiaru próbki reprezentatywnej. Ilustrację ilościową prezentowanych i diskutowanych w niniejszej pracy miar statystycznej charakteryzacji geometrii kompozytów stanowią obliczenia numeryczne wykonane dla trzech typów wygenerowanych dwuskładnikowych mikrostruktur losowych.

2. Miary mikrostruktury — definicje

2.1. Prawdopodobieństwo n -punktowe

Rozważmy pewną dwuskładnikową mikrostrukturę losową zajmującą obszar V . Niech ponadto składniki 1 oraz 2 tego ośrodka zajmują odpowiednio obszary V_1 oraz V_2 . Definiując dla określonego składnika „ i ” tzw. funkcję charakterystyczną:

$$I^{(i)}(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \text{dla } \mathbf{y} \in V_i \\ 0, & \text{dla } \mathbf{y} \notin V_i \end{cases} \quad (1)$$

określamy rozkład przestrzenny tego składnika w kompozycie. Oczywiście, wartość prawdopodobieństwa, że losowo wybrany punkt znajduje się w składniku i określa zależność:

$$S_1^{(i)} = \phi^{(i)} = \langle I^{(i)}(\mathbf{y}) \rangle \quad (2)$$

Wielkość $S_1^{(i)}$ określana jest również jako tzw. prawdopodobieństwo jednopunktowe dla składnika i . Jest ona miarą udziału frakcyjnego $\phi^{(i)}$ składnika i w kompozycie. Operator $\langle * \rangle$, w powyższej zależności, oznacza symbol uśredniania objętościowego.

Analogicznie definiowane jest tzw. prawdopodobieństwo dwupunktowe, tj.:

$$S_2^{(i)}(\mathbf{z}_2) = \langle I^{(i)}(\mathbf{y}) \rangle \langle I^{(i)}(\mathbf{y} + \mathbf{z}_2) \rangle \quad (3)$$

będące miarą prawdopodobieństwa, że losowo wybrane dwa punkty o współrzędnych y i $y + z_2$, znajdują się w składniku i . Przy statystycznej jednorodności oraz statystycznej izotropii ośrodka, $S_2^{(i)}(\mathbf{z}_2)$ zależy tylko od względnej odległości pomiędzy dwoma punktami [10] $z = |\mathbf{z}_2|$ i ponadto prawdziwe są następujące zależności [11]:

$$\begin{aligned} S_2^{(1)}(z) &= \phi^{(1)} - 0.5S_2^{(12)}(z) \\ S_2^{(2)}(z) &= \phi^{(2)} - 0.5S_2^{(12)}(z) \\ S_2^{(1)}(z) + 2S_2^{(12)}(z) + S_2^{(2)}(z) &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie $S_2^{(12)}$ oznacza prawdopodobieństwo, że dwa losowo wybrane punkty znajdują się w dwóch różnych składnikach kompozytu. Oczywiście dla $|z| = 0$ prawdopodobieństwo dwupunktowe jest równoważne prawdopodobieństwu jednopunktowemu.

W ogólnym przypadku, prawdopodobieństwo n -punktowe definiuje się jako:

$$S_n^{(i)}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n \langle I^i \langle y + z_i \rangle \rangle \quad \text{z warunkiem } z_i = 0 \quad (5)$$

Jest ono miarą prawdopodobieństwa, że losowo wybrane n punktów, o zadanych względnych odległościach, znajdzie się w składniku i . Oczywiście przy przyjęciu dodatkowo $z_2 = 0$ jest ono równoważne prawdopodobieństwu $(n - 1)$ -punktowemu, itd.

Prawdopodobieństwo dwupunktowe dla i -tego składnika zbiega, przy $z \rightarrow \infty$, do wartości $(\phi^{(i)})^2$, natomiast prawdopodobieństwo n -punktowe, przy $z_2, z_3, \dots, z_n \rightarrow \infty$, osiąga wartość $(\phi^{(i)})^n$ [11].

W dalszej części ograniczono się do analizy wyłącznie prawdopodobieństwa jedno- i dwupunktowego ze względu na ich szerokie zastosowanie w mechanice ośrodków niejednorodnych i równocześnie stosunkowo mały stopień ich złożoności.

2.2. Funkcja „lineal-path”

Dla statystycznie izotropowego ośrodka funkcja „lineal-path”, $L^{(i)}(z)$, określa prawdopodobieństwo, że losowo „rzucony” na jego obszar odcinek o długości z w całości znajduje się w jednym składniku [7]. Jak łatwo się zorientować miara ta zawiera dużą ilość infor-

macji o tym w jakim stopniu połączone są ze sobą składniki w kompozycji. Funkcja ta jest malejąca ze względu na zmienną z i prawdziwe są następujące zależności:

$$\begin{aligned} L^{(i)}(0) &= \phi^{(i)} \\ L^{(i)}(\infty) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

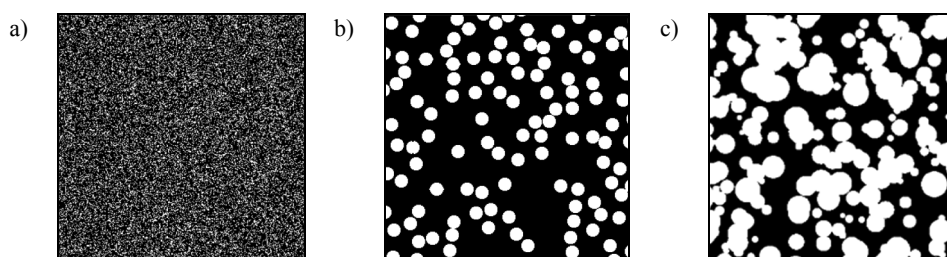
Jeśli, analogicznie jak w przypadku prawdopodobieństwa dwupunktowego, zdefiniujemy $L^{(12)}(z)$ jako prawdopodobieństwo, że losowo „rzucony” odcinek o długości z znajduje się jednocześnie w obu składnikach kompozytu, to prawdą jest, że:

$$L^{(1)}(z) + L^{(12)}(z) + L^{(2)}(z) = 1 \tag{7}$$

Funkcja „*lineal-path*” ma szczególne zastosowanie w matematycznej rekonstrukcji rzeczywistych ośrodków. Wykazano nawet, że znajomość prawdopodobieństwa dwupunktowego jest nie wystarczająca do odtworzenia rzeczywistego materiału — zastosowanie dodatkowo w procedurze rekonstrukcji funkcji „*lineal-path*” daje znacznie bardziej zadawalające rezultaty [12, 13].

3. Obrazy numerycznie wygenerowanych mikrostruktur

W celu zilustrowania procedury wyznaczania przedstawionych powyżej funkcji korelacji „obróbce” statystycznej poddano trzy obrazy różnych mikrostruktur losowych wygenerowanych numerycznie (rys. 2).



Rys. 2. Obrazy wygenerowanych numerycznie mikrostruktur losowych:
a) i b) udział frakcyjny składnika 2 — około 0,25; c) udział frakcyjny składnika 2 — około 0,5

Rozdzielczość każdego obrazu jest taka sama, tj. każdy z nich utworzony jest z 90 000 kwadratowych pikseli. Każdy piksel ma wymiar boku równy $l = L/N$, gdzie L oznacza wymiar boku całej mikrostruktury, natomiast N jest ilością komórek tworzących jeden „wiersz” mikrostruktury. W przypadku przyjętej rozdzielczości implikuje to $N = 300$. Oczywiście,

każdej komórce odpowiada tylko jeden składnik któremu przypisany jest jeden kolor — czarny (matryca) albo biały (wtrącenie). Udział frakcyjny składnika 2, w przypadku mikrostruktur przedstawionych na rysunku 2a i 2b wynosi około 0,25, natomiast dla losowej realizacji przedstawionej na rysunku 2c — około 0,5.

Różne obrazy mikrostruktur (rys. 2) są wynikiem zastosowania różnych sposobów ich numerycznej generacji. Pierwsza realizacja (rys. 2a) utworzona jest poprzez losowanie dla każdej komórki (piksela) liczby z rozkładu równomiernego z zakresu 0 do 1 [12]. Jeśli wygenerowana liczba jest mniejsza od założonej wartości udziału frakcyjnego $\phi^{(2)}$, to wówczas komórce przypisywany jest składnik 2 — kolor biały, w przeciwnym wypadku komórka wypełniana jest kolorem czarnym (składnik 1).

Kolejna mikrostruktura (rys. 2b) została wygenerowana poprzez losowe rozmieszczenie na jej obszarze dysków o jednakowej średnicy D , przy zachowaniu warunku, że nie mogą one na siebie nachodzić. Innymi słowy, w przypadku tej mikrostruktury jedynie położenie pierwszego dysku jest całkowicie dowolne — każdy następny musi spełnić zadany warunek, tj. odległość pomiędzy środkami dysków nie może być mniejsza niż ich średnica D . Ostatni przypadek (rys. 2c) to losowe rozmieszczenie dysków o różnych promieniach bez nałożenia warunku, że nie mogą się wzajemnie przenikać.

4. Funkcje korelacji analizowanych mikrostruktur

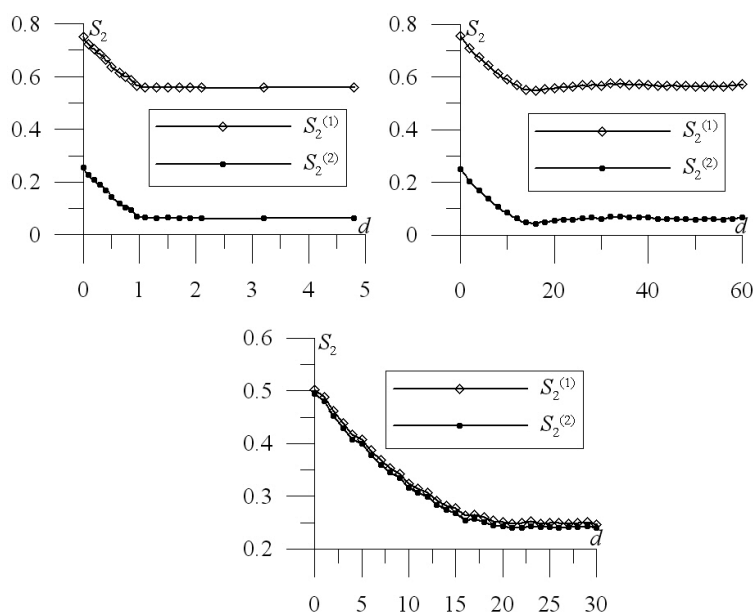
4.1. Prawdopodobieństwo jedno- i dwupunktowe

Prawdopodobieństwo dwupunktowe dla składnika i określa, w funkcji długości z , wartość prawdopodobieństwa, że dwa losowo wybrane punkty obrazu mikrostruktury, o zadanej odległości z , znajdują się w i -tym składniku kompozytu. Wobec powyższego określenie wartości np. $S_2^{(2)}(z)$, czyli prawdopodobieństwa dwupunktowego dla wtrącenia, z wykorzystaniem symulacji Monte Carlo, można przeprowadzić w łatwy sposób [11], tj. poprzez wielokrotne numeryczne „rzucanie” odcinka o zadanej długości z i dowolnej orientacji oraz zliczanie ile razy oba końce odcinka znajdowały się w składniku 2. Wówczas wartość funkcji korelacji dla ustalonego z można określić ze wzoru:

$$S_2^{(2)}(z) = \frac{n_s(z)}{n_T} \quad (8)$$

gdzie $n_s(z)$ oznacza liczbę sukcesów, tj. zdarzeń takich, że oba punkty znajdują się w komórce wypełnionej składnikiem 2, natomiast n_T oznacza liczbę wszystkich prób. Konieczną liczbę prób n_T można oszacować korzystając np. z centralnego twierdzenia granicznego [3]. Zagadnienie to nie będzie w niniejszym artykule szerzej omawiane. W literaturze można również znaleźć informacje, że do określenia wartości (8) wystarczająca jest liczba symulacji z zakresu 5÷10 tysięcy [14]. W pracy przyjęto $n_T=10\ 000$.

Dla każdej z trzech mikrostruktur (rys. 2) określono prawdopodobieństwo dwupunktowe dla wtrącenia według zależności (8). Następnie korzystając z (4) wyznaczono tę miarę korelacji dla matrycy $S_2^{(i)}$. Graficzną prezentację uzyskanych wyników, dla różnych długości odcinka z , przedstawiono na rysunku 3, przy czym obowiązuje następujący porządek, tj. wykres z rysunku 3a odpowiada mikrostrukturze przedstawionej na rysunku 2a, itd. Ponadto na wykresach długość odcinka z przedstawiono w formie znormalizowanej, tj. $d = z/l$, która reprezentuje liczbę pojedynczych komórek (pikseli).



Rys. 3. Prawdopodobieństwo dwupunktowe dla matrycy $S_2^{(1)}$ oraz wtrącenia $S_2^{(2)}$ określone dla mikrostruktur z rysunku 2

Zauważmy, iż spełniona jest zależność (o której mowa była w podrozdz. 2), że swoją maksymalną wartość równą $\phi^{(i)}$ ta funkcja korelacji osiąga dla $z = 0$. W żadnym z trzech przypadków błąd względny pomiędzy wartością $S_2^{(i)}(z = 0)$, a udziałem frakcyjnym składnika i nie przekroczył 1%. W związku z tym przyjętą liczbę symulacji Monte Carlo ($n_T = 10\,000$) można uznać za wystarczającą. Druga własność tej miary, o której wspomniano wcześniej, tj. że dla $z \rightarrow \infty$ prawdopodobieństwo dwupunktowe asymptotycznie zbiega do $(\phi^{(i)})^2$, również jest spełniona. Dla wszystkich trzech analizowanych obrazów, wartość $(\phi^{(i)})^2$ osiągana jest znacznie wcześniej niż w nieskończoności. Oznacza to, iż jeśli dla pewnej wartości $z = z^*$ zachodzi:

$$S_2^{(i)}(z^*) = (\phi^{(i)})^2 \quad (9)$$

to dwa dowolne punkty, których względna odległość jest większa niż z^* , nie są ze sobą skorelowane. W przypadku funkcji przedstawionej na rysunku 3b można zauważyć dodatkowo, periodyczne ale o zmniejszającej się amplitudzie drobne oscylacje wokół wartości $(\phi^{(i)})^2$. Wynika to z faktu, iż położenie wtrąceń (dysków), z jednej strony jest losowe, ale z drugiej strony zależy od położenia wcześniej wylosowanych dysków (warunek, że dyski nie mogą na siebie nachodzić). Co ciekawe ta oscylacja wokół wartości $(\phi^{(i)})^2$ „z grubsza” zachodzi w odstępach równych średnicy wtrącenia D [11]. Dla mikrostruktury z rysunku 2b przyjęto średnicę wtrąceń $D = 16l$. Na wykresie z rysunku 3b można również zauważyć, że pierwszy punkt przegięcia występuje dla $d \approx 16$. Miara ta daje zatem możliwość określenia wielkości wtrącenia występującego w ośrodku losowym. W przypadku funkcji z rysunku 3c nietrudno zauważyć, że asymptotycznie zbiega ona do $(\phi^{(i)})^2$ i osiąga tę wartość dla $z \approx 20l$. Prawdopodobieństwo dwupunktowe nie daje tym razem informacji o dokładnej wielkości wtrąceń (w mikrostrukturze występują bowiem wtrącenia o wymiarach znacznie większych niż $20l$) — wobec powyższego $D = 20l$ określane jest mianem średnicy „charakterystycznego wtrącenia” [11].

Z „przebiegu” funkcji prawdopodobieństwa dwupunktowego można określić również następną charakterystykę geometryczną ośrodka, tj. powierzchnię właściwą s wtrąceń [1]. Spełnione są bowiem następujące zależności:

$$s = -4 \frac{d}{dz} S_2^{(i)}(z) \Big|_{z=0} = 2 \frac{d}{dz} S_2^{(12)}(z) \Big|_{z=0} \quad (10)$$

Dla analizowanych mikrostruktur (a), (b) i (c) wartość tę oszacowano jako równą odpowiednio: $1 * 1/l$, $0,0625 * 1/l$ oraz $0,1 * 1/l$.

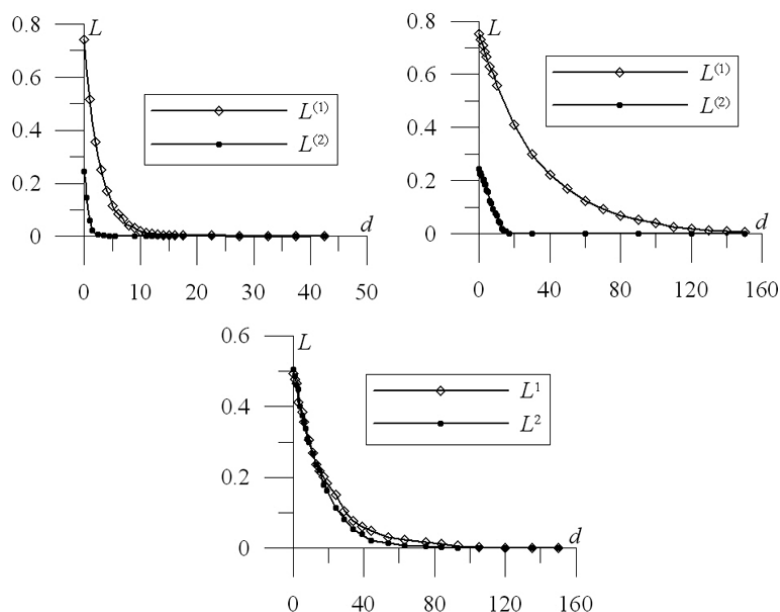
4.2. Funkcja „lineal-path”

Funkcję $L^{(i)}(z)$ wyznacza się analogicznie jak w przypadku prawdopodobieństwa dwupunktowego, tj. poprzez losowe „rzucanie” odcinka o długości z i zliczanie liczby sukcesów $n_s(z)$, a następnie określenie wartości funkcji ze wzoru (8). Różnica jest taka, że w tym przypadku jako sukces rozumiemy zdarzenie w którym losowo rzucony odcinek (o długości $z = dl$) w całości znajduje się w i -tym składniku (w komórkach zajmowanych przez i -ty składnik).

Wyniki dla analizowanych mikrostruktur przedstawiono na rysunku 4 (zachowując układ jak poprzednio). Tak jak wcześniej przyjęto liczbę prób $n_T = 10\,000$.

Przyglądając się wykresom 4a oraz 4b łatwo dostrzec, że stopień połączenia składnika 2 w tych mikrostrukturach jest znacznie mniejszy niż matrycy. Jest to szczególnie zauważalne dla funkcji „lineal-path” odpowiadającej mikrostrukturze z rysunku 2b (np. dla $z = 10l$ mamy $L^{(1)} = 0,558$ i $L^{(2)} = 0,069$). Jeśli teraz wrócić do rysunku przedstawiającego tę mikrostrukturę (rys. 2b) to łatwo dostrzec, że wtrącenia ze względu na zadany warunek nie tworzą klastrow i faktycznie stopień połączenia składnika 2 jest znacznie mniejszy niż matrycy. W ostatniej mikrostrukturze (rys. 2c) trudno na pierwszy rzut oka dostrzec, komórki,

którego składnika w większym stopniu są między sobą połączone. Funkcja *lineal-path* określona dla tej mikrostruktury potwierdza, że oba składniki połączone są między sobą w porównywalnym stopniu — funkcje $L^{(1)}$ i $L^{(2)}$ niemal się pokrywają (rys. 4c).



Rys. 4. Funkcje „*lineal-path*” dla matrycy $L^{(1)}$ oraz wtrącenia $L^{(2)}$ określone dla mikrostruktur z rysunku 2

5. Minimalny wymiar próbki reprezentatywnej

Pojęciem bezpośrednio stowarzyszonym z ośrodkami losowymi jest tzw. „reprezentatywność” próbki. Próbka jest reprezentatywna wtedy i tylko wtedy gdy średnia wartość mierzona wielkości otrzymana ze skończonej liczby pomiarów wykonanych na losowo wybranych, ale o tym samym ustalonym wymiarze, próbkach reprezentuje parametr materiałowy ośrodka losowego, oczywiście z zadaniem dopuszczalnym błędem. W ogólnym przypadku, różne cechy materiałowe ośrodka losowego determinują różne wielkości próbki reprezentatywnej.

W niniejszym punkcie zilustrowana zostanie procedura wyznaczania wielkości próbki reprezentatywnej ze względu na statystyczne miary geometryczne ośrodka losowego, tj. prawdopodobieństwo jednopunktowe, dwupunktowe oraz funkcję *lineal-path*. Szczegółowe obliczenia prowadzone są dla ośrodka losowego z mikrostrukturą z rysunku 2a. Przyjmujemy, że składnik 2 (białe komórki) pojawia się z prawdopodobieństwem p , natomiast składnik 1 (czarne komórki) odpowiednio z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Wielkość próbki

definiujemy przez znormalizowaną długość boku próbki n wyrażającą liczbę pojedynczych pikseli w wierszu. W takim przypadku, dla określonej realizacji ω , udział frakcyjny składnika 2 w próbce, wynosi:

$$\phi^{(2)}(\omega, n) = \frac{t}{n^2} \quad (11)$$

gdzie t oznacza liczbę komórek wypełnianych kolorem białym w próbce o długości boku n . Przyjęty sposób generacji analizowanej mikrostruktury, opisany w punkcie 3, implikuje rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\phi^{(2)}(\omega, n)$ w postaci rozkładu dwumianowego. Wobec tego wartość oczekiwana z udziału frakcyjnego składnika 2 wynosi:

$$E\{\phi^{(2)}(n)\} = \sum_{t=0}^{n^2} \frac{t}{n^2} \binom{n^2}{t} p^t q^{n^2-t} = p \quad (12)$$

Otrzymana wartość nie zależy od wymiaru próbki n i jest równoważna wartości tego parametru dla ośrodka losowego. W przypadku udziału frakcyjnego wymiar próbki jest więc dowolny, nawet próbka wielkości jednego piksela jest reprezentatywna ze względu na prawdopodobieństwo jednopunktowe. Oczywiście w tym ostatnim przypadku liczba próbek z których obliczymy wartość średnią musi być bardzo duża.

W przypadku prawdopodobieństwa dwupunktowego, warunkiem koniecznym reprezentatywności próbki jest warunek:

$$\frac{\left| E\{\phi^{(2)}\}^2 - E\{(\phi^{(2)})^2\} \right|}{(E\{\phi^{(2)}\})^2} \leq \varepsilon \quad (13)$$

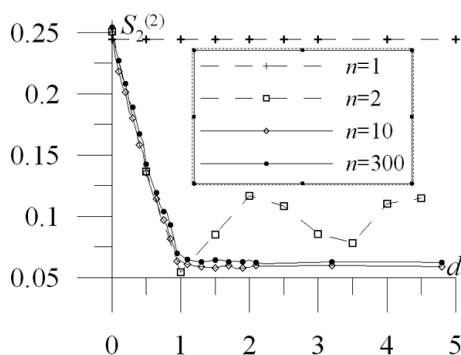
gdzie $\varepsilon > 0$ jest z góry zadaną tolerancją poprawności odwzorowania. Powyższy warunek jest konsekwencją własności prawdopodobieństwa dwupunktowego, tzn. jego asymptotyczna wartość jest równa $S_2^{(i)}(z) = (\phi^{(i)})^2$. W analizowanej przez nas mikrostrukturze:

$$E\{(\phi^{(2)}(n))^2\} = \sum_{t=0}^{n^2} \left(\frac{t}{n^2}\right)^2 \frac{n^2!}{t!(n^2-t)!} p^t q^{n^2-t} = \frac{(n^2-1)p^2 + p}{n^2} \quad (14)$$

Podstawiając wyrażenia (12) i (14) do nierówności (13) otrzymujemy, że wymiar próbki, aby była ona reprezentatywna ze względu na prawdopodobieństwo dwupunktowe, musi spełniać następujący warunek:

$$n \geq \sqrt{\frac{1-p}{\varepsilon p}} \quad (15)$$

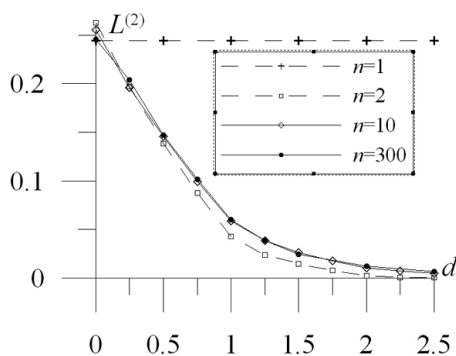
Dla rozważanej mikrostruktury (rys. 2a) udział frakcyjny składnika 2 wynosi około 0,25, zatem $p = 0,25$. Jeśli przyjąć dokładność odwzorowania taką, że błąd względny opisanej zależnością (13) ma być mniejszy bądź równy 3% — innymi słowy $\varepsilon = 0,03$ — to wówczas minimalny wymiar próbki określony na podstawie warunku (15) wynosi $n \geq 10$.



Rys. 5. Prawdopodobieństwo dwupunktowe dla wtrącenia dla różnych wielkości próbek

Na rysunku 5 przedstawiono wykres prawdopodobieństwa dwupunktowego dla składnika 2 dla różnych wielkości próbek, tj. $n = 300$ (rys. 2a), $n = 1$, $n = 2$ oraz $n = 10$. Dla przypadku $n = 300$ funkcja ta jest po prostu powieleniem rysunku 3a. W przypadku mikrostruktur o wymiarach mniejszych niż $n = 300$ wykonano pewną liczbę realizacji próbek, za każdym razem generując ją z ustalonym prawdopodobieństwem $p = 0,25$. Dla każdej realizacji określono prawdopodobieństwo dwupunktowe dla wtrącenia. Wartości przedstawione na wykresie (rys. 5) są zatem wartością średnią po wszystkich wykonanych realizacjach; w przypadku $n = 10$ wykonano 120 losowych realizacji próbek.

Podobnie analizowano, dla różnych wielkości próbki, odwzorowanie funkcji *lineal-path*. Wyniki obliczeń numerycznych przedstawia rysunek 6. Łatwo stwierdzić, że próbka reprezentatywna ze względu na prawdopodobieństwo dwupunktowe jest również reprezentatywna ze względu na funkcję *lineal-path*.



Rys. 6. Funkcja *lineal-path* dla wtrącenia dla różnych wielkości próbek

6. Wnioski

W artykule przedstawiono krótką analizę statystyczną ośrodków losowych na podstawie prawdopodobieństwa n -punktowego oraz funkcji „lineal-path”. Ograniczono się do tych dwóch funkcji korelacji jako najczęściej wykorzystywanych miar w mechanice ośrodków niejednorodnych. Znajomość tych funkcji korelacji pozwala na tworzenie oszacowań dla parametrów efektywnych, matematyczną rekonstrukcję rzeczywistych materiałów lub określanie wielkości próbki reprezentatywnej.

W pracy wyznaczono wartości funkcji korelacji dla trzech wygenerowanych losowych mikrostruktur będących imitacją obrazów binarnych rzeczywistych materiałów. Na podstawie uzyskanych wyników przedstawiono właściwości oraz informacje o ośrodku wynikające ze znajomości poszczególnych funkcjach korelacji. Pokazano, że na podstawie prawdopodobieństwa dwupunktowego można określać w jakim stopniu skorelowane są ze sobą składniki mikrostruktury. Ponadto na jego podstawie możemy „z grubsza” określać wielkość wtrąceń (średnicę D w przypadku wtrąceń kolistych) oraz powierzchnię właściwą ośrodka s . Określenie funkcji „lineal-path”, dla matrycy jak i wtrącenia, dostarcza informacji w jakim stopniu połączone są ze sobą poszczególne składniki ośrodka losowego. Taka informacja jest niezwykle ważna w przypadku określania parametrów efektywnych transportu. Jak pokazano w pracy określanie wartości funkcji korelacji można wykonać, poprzez prostą w algorytmizacji, metodę opartą na symulacjach Monte Carlo. Przyjęta w obliczeniach numerycznych liczba realizacji $n_T = 10\ 000$ okazała się wystarczająca dla przypadku analizowanych typów mikrostruktur.

Jako przykład zastosowania omówionych funkcji korelacji rozważono zagadnienie tzw. próbki reprezentatywnej.

LITERATURA

- [1] Debye P., Anderson H.R., Brumberger H.: Scattering by an inhomogeneous solid. The correlation function and its applications. J. Appl. Phys., vol. 28, 1957, s. 679–683
- [2] Drugan W.J., Willis J.R.: A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. J. Mech. Phys. Solids, vol. 44, nr 4, 1996, s. 497–524
- [3] Feller W.: An Introduction To Probability Theory And Its Applications. London, John Wiley and Sons, 1961
- [4] Garboczi E.J., Bentz D.P., Martys N.S.: Experimental Methods for Porous Media, New York, Academic Press 1999
- [5] Janke W.: Pseudo Random Numbers: Generation and Quality. Lecture Notes John von Neumann Institute for Computing, vol. 10, 2002
- [6] Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., Jeulin D.: Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. Int. Journal of Solids and Structures, vol. 40, 2003, s. 3647–3679
- [7] Lu B., Torquato S.: Lineal-path function for random heterogeneous materials. Physical Review A, vol. 45, nr 2, 1992, s. 922–929
- [8] Park S.H., Kim H.K., Morales A., Ko S.J.: Air-void Analysis System of Polished Concrete Using Image Processing. Journal of Applied Computer Science, Vol. 15, Nr 2, 2007, s. 19–25
- [9] Rozanski A., Lydzba D., Shao J.F.: Numerical evaluation of effective transport properties of random cell models: two-point probability approach, “Geoproc 2008”, Polytech Lille, Lille 1–5 czerwca 2008, s. 345–353
- [10] Sejnoha M., Zeman J.: Micromechanical Analysis of Random Composites, Prague, Czech Technical University 2000

- [11] *Torquato S.*: Random Heterogeneous Materials. Microstructure and Macroscopic Properties. New York, Springer-Verlag 2002
- [12] *Yeong C.L.Y., Torquato S.*: Reconstructing random media. *Physical Review E*, vol. 57, nr 1, 1998, s. 495–506
- [13] *Yeong C.L.Y., Torquato S.*: Reconstructing random media II. Three dimensional media from two-dimensional cuts. *Physical Review E*, vol. 58, nr 1, 1998, s. 224–233
- [14] *Zeman J., Sejnoha M.*: Numerical evaluation of effective elastic properties of graphite fiber tow impregnated by polymer matrix. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 49, 2001, s. 69–90