

*Magdalena Osławska\*, Wojciech Puła\*\**

## ANALIZA STATECZNOŚCI ŚCIAN KOTWIONYCH ZAGŁĘBIONYCH W GRUNTACH SPOISTYCH METODĄ RACHUNKU WARIACYJNEGO

---

### 1. Wstęp

Pod koniec lat 70. XX w. Garber i Baker [1] zaproponowali wariacyjne podejście do zagadnień równowagi granicznej. Skupiali się przede wszystkim na analizie stateczności zboczy oraz badaniu nośności granicznej [2, 3]. W pracy [1] przedstawili oni rezultaty w formie twierdzeń opartych na klasycznym rachunku wariacyjnym. Podstawowe, udowodnione przez nich twierdzenie mówi, że w zagadnieniach równowagi granicznej wartość ekstremum nie zależy od rozkładu naprężeń normalnych wzdłuż krzywej poślizgu.

W latach 90. XX w. podjęto próby [5] analizy stateczności kotwionych konstrukcji oporowych przy użyciu rozwiązań Garbera i Bakera. Problem wymagał podejścia numerycznego. Przy ówczesnym dostępnym oprogramowaniu nie można było uzyskać zadowalającego rezultatu.

W pracy [6] rozwiązano zagadnienie kotwionej ściany w sposób numeryczny, uzyskując wartości siły działającej w kotwi. Praca ta dotyczyła tylko gruntów niespoistych. W prezentowanej pracy rozwiązano zagadnienie w gruncie spoistym, co wymagało analizy funkcjonału w rozbudowanej formie.

### 2. Sformułowanie zadania

Przyjęto następujące założenia:

- zakłada się płaski stan odkształcenia;
- ośrodek gruntowy jest wazki i posiada jednorodne cechy;

---

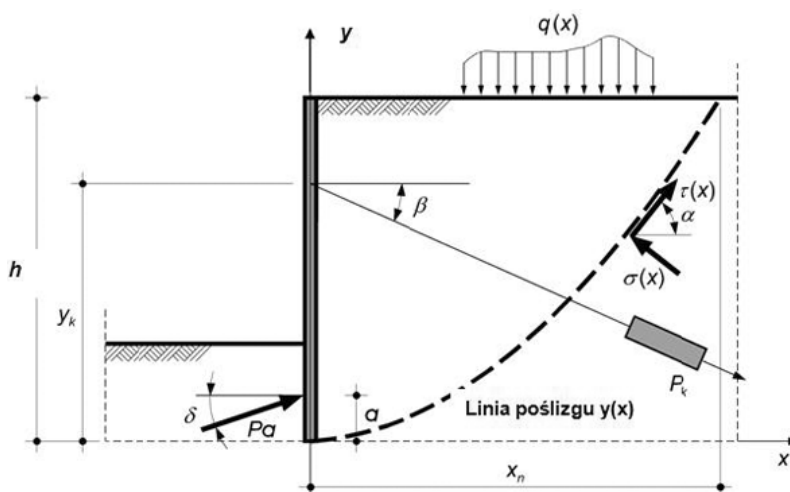
\* Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska, Wroclaw

\*\* studentka IV roku, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska, Wroclaw

- zakłada się, że na linii poślizgu opisanej krzywą  $y(x)$  występują warunki równowagi granicznej, spełniającej kryterium wytrzymałości Coulomba:

$$\tau(x) = [\sigma(x) - u(x)] \operatorname{tg} \phi + c; \quad (1)$$

- w bilansie sił rozpatruje się tzw. cięcie zewnętrzne czyli, że poślizgowi ulega bryła sztywna ograniczona linią poślizgu, naziemem oraz ścianką, przy czym ściankę traktuje się jako integralną część tej bryły. Konsekwencją tego jest brak siły parcia czynnego gruntu na ściankę w równaniach równowagi;
- -zakłada się, że siła będąca wypadkową odporu gruntu oraz kąt jej nachylenia  $\delta$  są dane przed przystąpieniem do rozwiązania zadania — nie czyni się żadnych założeń co do sposobu obliczania odporu;
- -zakłada się, że linia poślizgu przechodzi przez dolny koniec ścianki.



Rys. 1. Schemat rozpatrywanego zadania

Równania równowagi (znakowanie i oznaczenia jak na rysunku powyżej) mają postać:

$$\int_l [\tau(x) \cos \alpha - \sigma(x) \sin \alpha] dl + P_k \cos \beta + P_a \cos \delta = 0, \quad (2)$$

$$\int_l [\tau(x) \sin \alpha + \sigma(x) \cos \alpha] dl - \int_0^{x_k} \{q(x) + \gamma[h - y(x)]\} dx - P_k \sin \beta + P_a \sin \delta = 0, \quad (3)$$

$$\int_l \{[\tau(x) \cos \alpha - \sigma(x) \sin \alpha]y - [\tau(x) \sin \alpha + \sigma(x) \cos \alpha]x\} dl + \int_0^{x_n} [q(x)x + \gamma(h-y)x] dx + P_k y_k \cos \beta + P_a y_a \cos \delta = 0. \quad (4)$$

gdzie:

$\int_l dl$  — całka krzywoliniowa wzdłuż krzywej poślizgu  $y(x)$ ,

$\gamma$  — ciężar objętościowy gruntu,

$$\alpha = \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Po przekształceniu równania (2) otrzymuje się następujące wyrażenie na siłę w kotwi:

$$P_k = \frac{-1}{\cos \beta} \int_0^{x_n} \{[(\sigma - u) \operatorname{tg} \phi + c] \cos \alpha - \sigma \sin \alpha\} \frac{dx}{\cos \alpha} - \int_0^{x_n} \left(\frac{P_a \cos \delta}{x_n \cos \beta}\right) dx = \int_0^{x_n} \frac{1}{\cos \beta} \left[ \sigma y' - (\sigma - u) \operatorname{tg} \phi - c - \frac{P_a \cos \delta}{x_n} \right] dx = \int_0^{x_n} H(x) dx. \quad (5)$$

Najniekorzystniejszą linią poślizgu będzie ta, dla której siła w kotwi będzie największa. Poszukuje się zatem maksimum funkcjonału  $P_k$ . Równania (3) i (4) traktuje się jako dwa dodatkowe warunki (oprócz warunków granicznych  $y(0) = 0$  i  $y(x_n) = h$ ). Jest to tzw. zadanie izoperymetryczne klasycznego rachunku wariacyjnego [4].

W związku z tym można napisać:

$$G = \int_0^{x_n} \{H(x) + \lambda_1 V(x) + \lambda_2 M(x)\} dx, \quad (6)$$

gdzie  $\lambda_1, \lambda_2$  — współczynniki nieoznaczone Lagrange'a;

$$\int_0^{x_n} \left\{ \sigma [y' \operatorname{tg} \phi + 1] - u y' \operatorname{tg} \phi + c y' - [q + \gamma(h-y)] - \frac{P_k \sin \beta}{x_n} + \frac{P_a \sin \delta}{x_n} \right\} dx = \int_0^{x_n} V(x) dx = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^{x_n} \left\{ \sigma (y \operatorname{tg} \phi - y y' - x y' \operatorname{tg} \phi - x) - y u \operatorname{tg} \phi + c y + u x y' \operatorname{tg} \phi - c x y' \right\} + \left\{ q(x)x + \gamma(h-y)x + \frac{P_k y_k \cos \beta}{x_n} + \frac{P_a y_a \cos \delta}{x_n} \right\} dx = \int_0^{x_n} M(x) dx = 0. \quad (8)$$

Grupując składniki ze względu na  $\sigma$  otrzymuje się następującą postać:

$$G = \int_0^{x_n} [\sigma(x)L(x) + S(x)]dx = \int_0^{x_n} g(x)dx. \quad (9)$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcjonału jest spełnienie przez funkcję podcałkową równań Eulera [4]. Dla funkcjonału  $G$  można zapisać:

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial y'} \right) = 0. \quad (11)$$

### 3. Rozwiązanie zadania

Ponieważ  $\frac{\partial g}{\partial \sigma} = 0$  równanie (10) sprowadza się do postaci:

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = \frac{\partial [\sigma(x)L(x) + S(x)]}{\partial \sigma} = L(x) = 0, \quad (12)$$

gdzie:

$$L(x) = \frac{1}{\cos \beta} (y' - \operatorname{tg} \phi) + \lambda_1 (y' \operatorname{tg} \phi + 1) + \lambda_2 (y \operatorname{tg} \phi - yy' - xy' \operatorname{tg} \phi - x), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} S(x) = & \frac{1}{\cos \beta} \left( u \operatorname{tg} \phi - c - \frac{P_a \cos \delta}{x_n} \right) - \lambda_1 u y' \operatorname{tg} \phi + \lambda_1 c y' - \lambda_1 [q + \gamma(h - y)] + \\ & - \frac{\lambda_1 P_k \sin \beta}{x_n} + \frac{\lambda_1 P_a \sin \delta}{x_n} - \lambda_1 u y \operatorname{tg} \phi + \lambda_2 c y + \lambda_2 u x y' \operatorname{tg} \phi - \lambda_2 c x y' + \\ & + \lambda_2 q(x)x + \lambda_2 \gamma(h - y)x + \frac{\lambda_2 P_k y_k \cos \beta}{x_n} + \frac{\lambda_2 P_a y_a \cos \delta}{x_n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Stąd:

$$\frac{1}{\cos \beta} (y' - \operatorname{tg} \phi) + \lambda_1 (y' \operatorname{tg} \phi + 1) + \lambda_2 (y \operatorname{tg} \phi - yy' - xy' \operatorname{tg} \phi - x) = 0. \quad (15)$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymuje się następujące wyrażenie na krzywą poślizgu:

$$y = \frac{\operatorname{tg} \phi (1 - \lambda_2 y \cos \beta) - \lambda_1 \cos \beta + \lambda_2 x \cos \beta}{1 - \lambda_2 y \cos \beta - \operatorname{tg} \phi (\lambda_2 x \cos \beta - \lambda_1 \cos \beta)}. \quad (16)$$

Wobec (9) i (12) wzdłuż najniekorzystniejszej linii poślizgu zachodzą związki:

$$\max_{\lambda_1, \lambda_2} G = \max_{\lambda_1, \lambda_2} \int_0^{x_n} g(x) dx = \max_{\lambda_1, \lambda_2} \int_0^{x_n} S(x) dx = P_k. \quad (17)$$

Po przekształceniu (12) uzyskuje się:

$$P_k = \max_{\lambda_1, \lambda_2} \frac{\int_0^{x_n} I(x) dx}{1 + \lambda_1 \sin \beta - \lambda_2 y_k \cos \beta}, \quad (18)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_n} I(x) dx &= \frac{u x_n \operatorname{tg} \phi - c x_n - P_a \cos \delta}{\cos \beta} - \lambda_1 u h \operatorname{tg} \phi + \lambda_1 c h - \lambda_1 \int_0^{x_n} q(x) dx - \lambda_1 \gamma h x_n + \\ &+ \lambda_1 \gamma \int_0^{x_n} y(x) dx + \lambda_1 P_a \sin \delta - \lambda_2 u \operatorname{tg} \phi \int_0^{x_n} y(x) dx + \lambda_2 c \int_0^{x_n} y(x) dx + \lambda_2 u h x_n \operatorname{tg} \phi + \\ &- \lambda_2 u \operatorname{tg} \phi \int_0^{x_n} y(x) dx - \lambda_2 c h x_n + \lambda_2 c \int_0^{x_n} y(x) dx + \lambda_2 \int_0^{x_n} x q(x) dx + \lambda_2 \gamma h \frac{x_n^2}{2} + \\ &- \lambda_2 \gamma \int_0^{x_n} x y dx + \lambda_2 P_a y_a \cos \delta. \end{aligned} \quad (19)$$

W celu rozwiązania równania Eulera (16) dokonuje się następującej zmiany współrzędnych:

$$\eta = 1 - \lambda_2 y \cos \beta \quad (20)$$

$$\xi = -\lambda_1 \cos \beta + \lambda_2 x \cos \beta \quad (21)$$

W wyniku przekształceń opisanych dokładnie w pracy [6] uzyskuje się następującą postać rozwiązania:

$$\sqrt{\eta^2 + \xi^2} = C_1 \exp \left\{ \operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} \right\} \quad (22)$$

Powracając do współrzędnych  $(x, y)$ :

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1 - \lambda_2 y \cos \beta)^2 + (-\lambda_1 \cos \beta + \lambda_2 x \cos \beta)^2} = \\ & = C_1 \exp \left\{ \operatorname{tg} \phi \left[ \operatorname{arctg} \frac{1 - \lambda_2 y \cos \beta}{-\lambda_1 \cos \beta + \lambda_2 x \cos \beta} \right] \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$C_1 = \sqrt{1 + \lambda_1^2 \cos^2 \beta} \exp \left\{ \operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda_1 \cos \beta} \right\} \quad (24)$$

Każda krzywa będąca rozwiązaniem równania (23) jest środkowo symetryczna względem środka układu współrzędnych  $(\xi, \eta)$ .

Wprowadzając współrzędne biegunowe z biegunem w środku układu współrzędnych  $(\xi, \eta)$ :

$$r \sin \theta = 1 - y \lambda_2 \cos \beta = \eta \quad (25)$$

$$r \cos \theta = -\lambda_1 \cos \beta + x \lambda_2 \cos \beta = \xi \quad (26)$$

rozwiązanie równania (23) można przedstawić w postaci:

$$r = C_1 \exp \{ \theta \cdot \operatorname{tg} \phi \} \quad (27)$$

Oznacza to, że krzywa opisana równaniem (23) jest fragmentem spirali logarytmicznej.

#### 4. Przypadek graniczny

Interesujące wyniki uzyskuje się przy założeniu iż  $\lambda_2 \rightarrow 0$ . Przypadek ten został szczegółowo omówiony w pracy [6].

W wyniku przekształceń wzoru (19) uzyskuje się następujące wyrażenie na  $P_k$ :

$$\begin{aligned} P_k &= -P_a - \lambda_1 \left( q + \frac{\gamma h}{2} \right) x_n - c x_n + \lambda_1 c h = \\ &= -P_a + h \left( q + \frac{\gamma h}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) - 2 \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Rozwiązanie to uzyskuje się tylko przy założeniu:  $\beta = 0^\circ$  i  $\delta = 0^\circ$  i jest ono identyczne z klasycznym rozwiązaniem Coulomba.

## 5. Ograniczenia na współczynniki Lagrange'a

Założenia, z których wynikają ograniczenia zostały dokładnie opisane w pracy [6]. Ograniczenia te są aktualne zarówno w ośrodku spoistym jak i niespoistym.

—  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$0 < \lambda_2 < \frac{1 - \sqrt{1 + \lambda_1^2 \cos^2 \beta} \exp \left\{ \operatorname{tg} \phi \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda_1 \cos \beta} - \frac{\pi}{2} \right] \right\}}{h \cos \beta}, \quad (29)$$

$$\lambda_1 < \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos \beta}; \quad (30)$$

—  $\lambda_1 > 0$  i  $\lambda_2 < 0$

$$0 > \lambda_2 > \frac{1 - \sqrt{1 + \lambda_1^2 \cos^2 \beta} \exp \left\{ \operatorname{tg} \phi \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda_1 \cos \beta} + \phi - \frac{\pi}{2} \right] \right\} \cos \phi}{h \cos \beta}, \quad (31)$$

$$0 < \lambda_1 < \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos \beta}; \quad (32)$$

—  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

$$0 > \lambda_2 > \frac{1 - \sqrt{1 + \lambda_1^2 \cos^2 \beta} \exp \left\{ \operatorname{tg} \phi \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda_1 \cos \beta} + \frac{\pi}{2} \right] \right\}}{h \cos \beta} \quad (33)$$

$$0 < \lambda_1 < \frac{-1}{\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \phi} \quad (34)$$

—  $\lambda_1 < 0$  i  $\lambda_2 > 0$

$$0 < \lambda_2 < \frac{1 - \sqrt{1 + \lambda_1^2 \cos^2 \beta} \exp \left\{ \operatorname{tg} \phi \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda_1 \cos \beta} + \phi \right] \right\} \sin \phi}{h \cos \beta}, \quad (35)$$

$$0 < \lambda_1 < \frac{-1}{\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \phi}. \quad (36)$$

## 6. Numeryczne poszukiwanie ekstremum

Pomimo znalezienia rozwiązania równania Eulera w postaci zamkniętej poszukiwania ekstremalnej siły  $P_k$  nie da się przeprowadzić na drodze analitycznej. Wynika to z faktu, że punkt przecięcia linii poślizgu z naziemem może być znaleziony jedynie w sposób przybliżony na drodze numerycznej. Podobnie niektóre z całek we wzorze (19) nie mają przedstawienia w postaci funkcji elementarnych.

Zatem w celu znalezienia siły  $P_k$  skonstruowano następujący algorytm:

- 1) Przyjęcie wartości współczynników Lagrange'a z jednego z obszarów wyznaczonych nierównościami (29)–(36).
- 2) Wyznaczenie punktu przecięcia funkcji  $y(x)$  z naziemem.
- 3) Numeryczne wyznaczenie wartości całek występujących we wzorze (19).
- 4) Wyznaczenie wartości ułamka występującego z prawej strony wzoru (18).
- 5) Powtórzenie czynności 1–4 aż do znalezienia maksymalnej wartości  $P_k$  w danym obszarze.
- 6) Powtórzenie czynności 1–5 dla wszystkich obszarów zmienności.

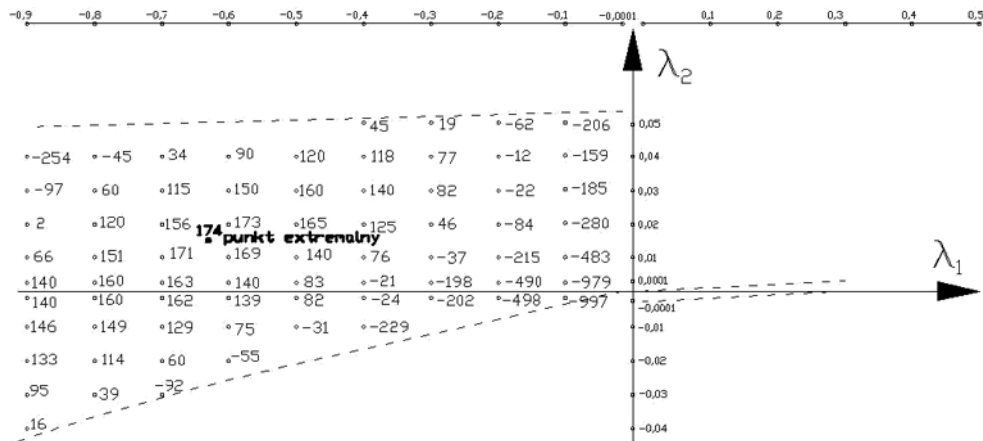
W związku z potrzebą dokonania obliczeń numerycznych, napisano specjalną aplikację w programie Mathematica.

W przedstawionym niżej przykładzie obliczeniowym przyjęto następujące dane: podłoże jednorodne — grunt spoisty o ciężarze objętościowym  $\gamma = 20,11 \text{ kN/m}^3$ , kącie tarcia wewnętrznego  $\phi = 17^\circ$  oraz spoistości  $c = 30 \text{ kPa}$ . Całkowita wysokość ściany  $h = 15 \text{ m}$ , zagłębienie ściany w gruncie:  $z = 3 \text{ m}$ , kąt nachylenia ściągu kotwi  $\beta = 0^\circ$ , odległość zaczepienia kotwi od dolnej krawędzi ścianki:  $12 \text{ m}$ . Założono, że ściana od strony wykopu jest gładka i kąt nachylenia siły oporu wynosi:  $\delta = 0^\circ$ . Odpór gruntu:  $P_a = 408,535 \text{ kN/m}$  (wyznaczony metodą Coulomba).

## 7. Analiza wyników

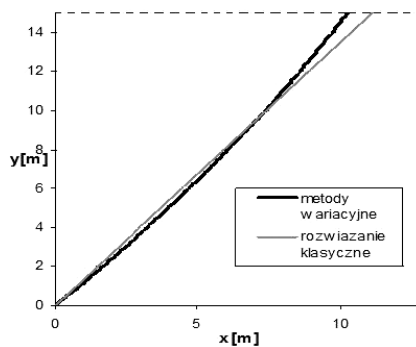
Niektóre spośród uzyskanych numerycznie wartości ułamka z prawej strony wzoru (18) zostały zamieszczone na rysunku 2.





Rys. 2. Niektóre wartości funkcjonału w okolicach punktu ekstremalnego

Dla  $\lambda_2 \rightarrow 0$  ( $\lambda_2 = 0$  odpowiada sytuacji, gdy linia poślizgu jest prostą) można zauważyć zbieżność do wartości otrzymanej z różnicy parcia czynnego i biernego (tylko przy założeniu  $\beta = 0^\circ$  i  $\delta = 0^\circ$ ). Dla  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  oraz  $\lambda_1 > 0$  i  $\lambda_2 < 0$  wartości siły funkcjonału osiągały wartości mniejsze od 0, a więc nieakceptowane w warunkach tego zadania. Dla  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  oraz  $\lambda_1 < 0$  i  $\lambda_2 > 0$  znaleziono ekstremum funkcjonału,  $P_k = 174$  kN/m i wartość ta jest rozwiązaniem zadania. Wartość ta jest większa niż otrzymana z rozwiązania według Coulomba ( $P_k = 164,277$  kN/m). Porównanie krzywych poślizgu dla obu rozwiązań znajduje się na rysunku 3.



Rys. 3. Krzywe poślizgu dla rozwiązania klasycznego i wariacyjnego

## 8. Uwagi końcowe

Przedstawione rozwiązanie stanowi uzupełnienie „luki teoretycznej” w wariacyjnych zagadnieniach równowagi granicznej (brak rozwiązania dla ściany kotwionej w ośrodku spójnym).

Uzyskana w analizowanym przykładzie wartość siły w kotwi jest większa w porównaniu z wynikiem dla prostoliniowej linii poślizgu w klasycznym rozwiązaniu Coulomba. W szeregu przykładach opisanych w pracy [6] w przypadku ośrodka niespoistego również otrzymano większe wartości w przypadku metody wariacyjnej. Można by więc, po zanalizowaniu dużej ilości przypadków, wprowadzić współczynniki poprawkowe, które pozwoliłyby przeliczać wyniki klasyczne na wyniki uzyskane teoretycznie bardziej poprawną metodą wariacyjną.

Zastosowanie zaprezentowanej tu metody do praktycznych obliczeń projektowych wymagałoby uzupełnienia istniejącego programu o efektywny system poszukiwania ekstremum w zdefiniowanych obszarach ograniczonych, gdyż obecne („ręczne”) przeszukiwanie obszarów jest zbyt pracochłonne.

#### LITERATURA

- [1] *Garber M., Baker R.*: Extreme-value problems of limiting equilibrium. Journ. of Geotechnical Eng. Div. ASCE GTI 1977, s. 1209–1225
- [2] *Garber M.*: Variational method for investigation the stability of slopes, Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol. 10, No.1, 1973, pp. 77–79
- [3] *Garber M., Baker R.*: Bearing capacity by variational method, Journal of the Geotechnical Engineering Division ASCE, GT11, vol. 102, 1977, pp. 1209–1225
- [4] *Gelfand I.M., Fomin S.W.*: Rachunek wariacyjny. Warszawa, PWN 1975
- [5] Puła O., Puła W.: Stability analysis of anchored wall by variational metod. “Proceedings of the sixth international symposium on landslides”, Christchurch, New Zealand, 1992, s. 525–530
- [6] Puła O., Puła W., Wolny A.: On the variational solution of limiting equilibrium problem involving an anchored wall. Computers and Geotechnics, 32(2005), s. 107–121