

*Adrian Różański\**, *Maciej Sobótka\*\**

## WARUNKI OPTYMALIZACJI KSZTAŁTU WYROBISK PODZIEMNYCH

---

### 1. Wstęp

Zagadnienie optymalizacji kształtu wyrobisk podziemnych po raz pierwszy pojawiło się w pracy Sałustowicza [5] w drugiej połowie XX w. W pracy [5] autor ograniczył swoje rozważania do zagadnień, w których analizował eliptyczne kształty wyrobisk podziemnych, uznając je za najbardziej optymalne. Wnioski swoje formułował bazując na, znanym już wówczas, rozwiązaniu dla sprężystej tarczy z otworem w kształcie elipsy [3].

Obecnie, ze względu na duże możliwości obliczeniowe współczesnych komputerów, bardzo często do rozwiązywania zagadnień topologii kształtu wykorzystuje się metody numeryczne [1]. Xie i Steven sformułowali w 1990 roku tzw. metodę optymalizacji ewolucyjnej (ang. *Evolutionary Structural Optimization* — ESO) [6, 7], która następnie została zaadaptowana do optymalizacji kształtu wyrobisk podziemnych [4]. Jest to metoda iteracyjna, która bazuje na dość prostym założeniu, tj. jeśli w danym kroku, w którymś z elementów nie został spełniony warunek optymalizacji, to obszar zostaje skorygowany poprzez usunięcie tych elementów. We wspomnianej pracy [4], wykorzystując metodę ESO potwierdzono, że najbardziej optymalne, co do kształtu, są wyrobiska o przekrojach eliptycznych. Jednak pomimo ogromnych możliwości, których dostarczają metody numeryczne brak jak dotąd rozwiązań uwzględniających sprężysto-plastyczny lub sprężysto-plastyczno-kruchy model górotworu. Zagadnienie optymalizacji kształtu wyrobisk podziemnych, dla tak przyjętego modelu górotworu, pozostaje więc wciąż otwartym polem badań i analiz.

W tym artykule formułuje się nowy, energetyczny warunek optymalizacji kształtu wyrobisk podziemnych ze względu na wyłączenie obudowy. Rozważania ograniczono do traktowania górotworu jako ośrodka liniowo sprężystego. W celu potwierdzenia słuszności przyjętego kryterium wyniki uzyskane z analiz numerycznych porównano z rozwiązaniem

---

\* Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska, Wrocław

\*\* Student V roku Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska, Wrocław

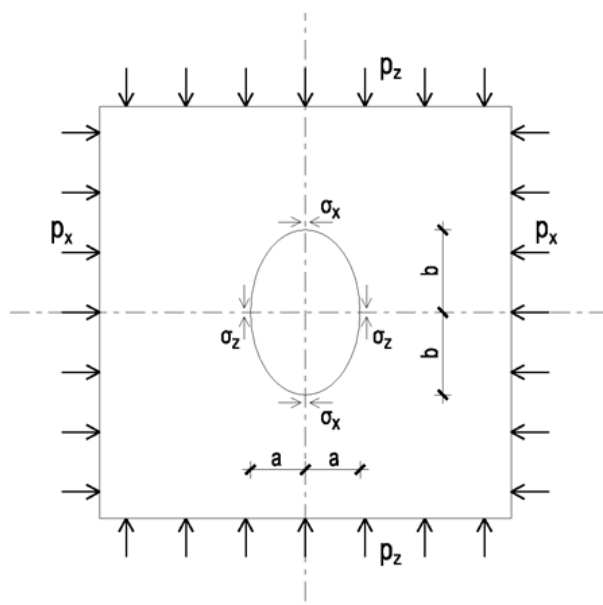
Salustowicza [5]. Układ pracy jest zatem następujący: w kolejnym rozdziale pokrótce prezentowane jest rozwiązanie Salustowicza. W punkcie 3 opisano podstawowe założenia metody ESO wraz z wynikami uzyskanymi w pracy [4]. Następnie formułowany jest nowy, energetyczny warunek optymalności kształtu wyrobisk podziemnych. Artykuł kończą liczne przykłady symulacji numerycznych oraz wynikające z nich wnioski.

## 2. Rozwiązanie Salustowicza

Jak wspomniano wcześniej Salustowicz [5] opierał swoje rozważania bazując na rozwiązaniu sprężystej tarczy z otworem eliptycznym (rys. 1) podanym przez Hubera [3]. W pracy [5] autor stwierdza, iż zależnie od stosunku długości półosi elipsy  $m = a/b$  oraz wzajemnego stosunku wielkości obciążenia poziomego  $p_x$  i pionowego  $p_z$ , największe naprężenia ściskające występują w wierzchołkach elipsy, tj. w spągu lub w kluczu. Naprężenia te, w zależności od wartości  $p_x$  oraz  $p_z$ , określają następujące zależności:

$$\sigma_x = -p_z + p_x \left(1 + 2 \frac{b}{a}\right), \quad (1)$$

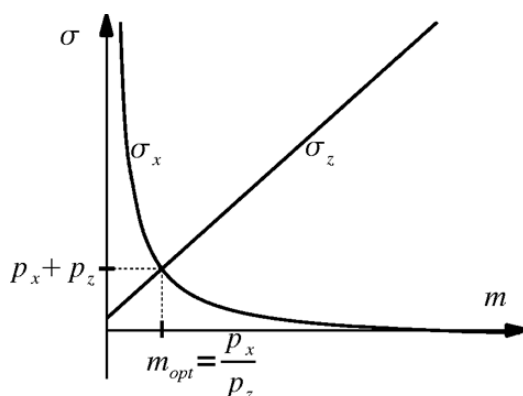
$$\sigma_z = p_z \left(1 + 2 \frac{a}{b}\right) - p_x. \quad (2)$$



Rys. 1. Schemat tarczy z otworem w kształcie elipsy

Na rysunku 2 przedstawiono zmienność wartości naprężeń poziomych (1) oraz pionowych (2) w zależności od stosunku półosi elipsy  $m$ . Wyraźnie widać, że istnieje pewna wartość tego stosunku –  $m_{opt}$  – dla której wartości  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  są sobie równe, tj.:

$$m_{opt} = \left(\frac{a}{b}\right)_{opt} = \frac{p_x}{p_z}. \quad (3)$$



Rys. 2. Zależność wartości naprężeń  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  od stosunku półosi elipsy  $m$

Nietrudno również zauważyć, że jest to najkorzystniejszy stosunek półosi ze względu na wytrzymałość górotworu, bowiem największe naprężenie ściskające występujące w tarczy ( $\sigma_x$  gdy  $m < m_{opt}$  lub  $\sigma_z$  gdy  $m > m_{opt}$ ) osiąga wówczas najmniejszą wartość równą:

$$\sigma_x = \sigma_z = p_x + p_z. \quad (4)$$

W tej samej pracy [5] sformułowano także inny warunek optymalności stwierdzając, że najkorzystniejszym przekrojem wyrobiska ze względu na wytrzymałość obudowy jest elipsa o stosunku półosi:

$$m_{opt} = \left(\frac{a}{b}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{p_x}{p_z}}. \quad (5)$$

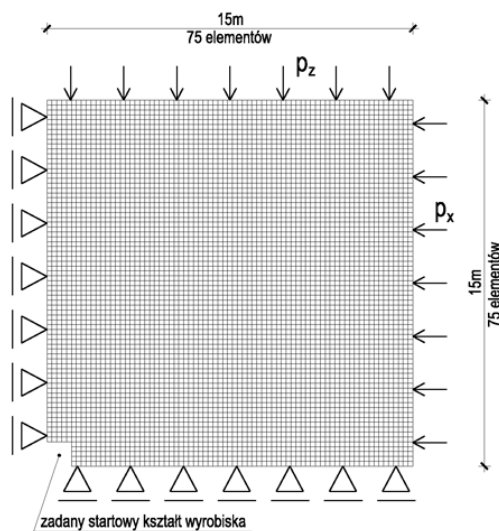
Niestety w pracy [5] nie znaleziono żadnego komentarza, który wyjaśniałby przyjęte przez Sałustowicza rozumowanie.

### 3. Metoda ESO

W 1990 r. Xie i Steven sformułowali tzw. metodę optymalizacji ewolucyjnej (ESO) [6, 7]. W pracy [4] rozszerzono jej zastosowanie implementując metodę ESO do optymalizacji

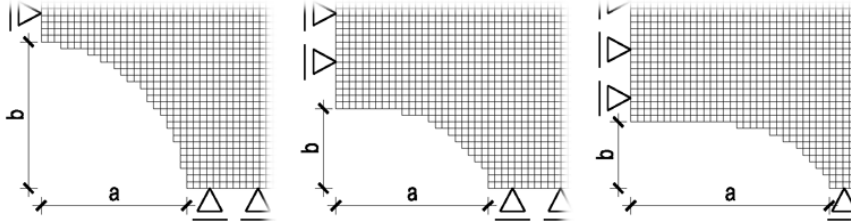
kształtu wyrobiska podziemnego. W dalszym ciągu pokrótce opisujemy sformułowanie metody oraz prezentujemy wyniki uzyskane przez autorów w pracy [4].

Rozpatrywany obszar dzielony jest na elementy — kwadratowe „komórki”. Ze względu na symetrię analizowanego przypadku, zagadnienie ograniczono do rozważania jedynie ćwiartki całego obszaru (rys. 3). Ponieważ ESO jest metodą iteracyjną, wymagane jest nadanie początkowego kształtu wyrobiska. Efekt ten uzyskano poprzez usunięcie z obszaru ustalonej ilości komórek, co zilustrowano graficznie na rysunku 3.



**Rys. 3.** Zagadnienie rozwiązywane w pracy [4]: schemat statyczny, podział na elementy oraz zadany początkowy kształt wyrobiska

Zagadnienie przedstawione na rysunku 3 jest schematem rozpatrywanym w pierwszej iteracji. W każdej kolejnej iteracji zagadnienie jest rozwiązywane metodą elementów skończonych i jeśli, w którymś z elementów nie został spełniony warunek optymalizacji, to obszar zostaje skorygowany poprzez usunięcie tych elementów. Jako warunek przyjęto sprawdzenie wartości aksjatora  $\sigma_0$  w każdym elemencie, tj. dla każdego elementu określana jest wartość  $\sigma_0$ , te komórki, w których  $\sigma_0$  ma najmniejszą wartość (są najmniej wyciągnięte) zostają odrzucone — usuwa się je z rozpatrywanego obszaru. Liczba usuwanych elementów ograniczona jest dwoma parametrami kontrolnymi: VR (*volume removal rate*) oraz RR (*removal ratio*). Pierwszy z nich określa jak dużo elementów można usunąć w jednym kroku (prędkość usuwania), drugi — jaka wielkość naprężenia, decyduje o odrzuceniu elementu. Optymalizacja zostaje zakończona w momencie, gdy usunięto założony wcześniej procentowy udział elementów lub gdy osiągnięta zostaje założona na starcie liczba iteracji. Uzyskane przez autorów wyniki, dla różnych wartości stosunku  $p_x/p_z$  przedstawiono w formie graficznej na rysunku 4.



**Rys. 4.** Wyniki optymalizacji dla różnych wartości stosunku  $p_x/p_z$  uzyskane przez autorów w pracy [4]: a)  $p_x/p_z = 1$ ; b)  $p_x/p_z = 2$ ; c)  $p_x/p_z = 3$

Obserwując rezultaty (rys. 4) wyraźnie widać, że uzyskane przekroje kształtem przypominają elipsy, a co więcej optymalny stosunek półosi  $m_{opt}$ , w każdym przypadku, równy jest stosunkowi  $p_x/p_z$ , zgodnie z zależnością (3). Na podstawie rezultatów uzyskanych w pracy [4] należy uznać za słuszne ograniczenie rozważań Sałustowicza do analizy jedynie wyrobisk o przekrojach eliptycznych. Jednak pomimo zgodności wyników pojawiają się pewne wątpliwości, co do jednoznaczności takiej optymalizacji, np. poprzez zdefiniowanie z góry ilości iteracji bądź udziału procentowego usuwanych elementów, co z pewnością wpływa na wynik optymalizacji. Nie wspomniano również o procedurze kalibracji parametrów  $RR$  oraz  $VR$  pisząc jedynie, że przyjęte przez autorów wartości są najczęściej stosowane w przypadku tej metody. Wreszcie, w pracy [4] nie znaleziono odpowiedzi na pytanie czy metoda jest wrażliwa na sposób dyskretyzacji, tj. pojawia się wątpliwość czy dzieląc obszar na większą liczbę elementów otrzymamy ten sam wynik?

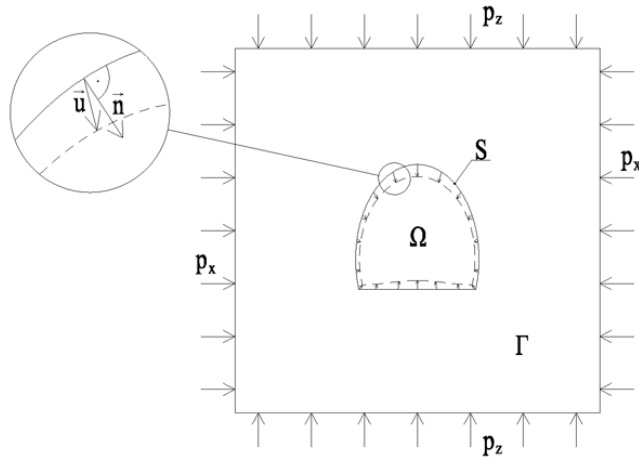
#### 4. Sformułowanie nowego warunku optymalizacji

Podstawowym zadaniem obudowy jest zapewnienie stateczności wyrobiska. W wyrobiskach znajdujących się na dużych głębokościach, gdzie dominującym obciążeniem jest ciśnienie deformacyjne, zadanie to realizowane jest poprzez przeciwstawianie się zaciskaniu górotworu. W tym przypadku wyężenie obudowy zależy od wielkości zaciskania rozumianej jako wielkość przemieszczeń na granicy obudowa – górotwór. Najbardziej korzystny kształt przekroju wyrobiska, to taki, który przy danej podpomości obudowy, ogranicza te przemieszczenia do minimum.

W celu dokonania optymalizacji kształtu wyrobiska, należy zatem uprzednio sformułować warunek optymalności wyrażony pewną miarą stanu przemieszczenia. Miarą, która dobrze opisuje ten stan jest scałkowane po powierzchni konturu wyrobiska pole przemieszczeń, zdefiniowane jako:

$$\Delta V = \int_S \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{n}} dS, \quad (6)$$

gdzie przyjęte oznaczenia literowe wyjaśniono na rysunku 5.



**Rys. 5.** Oznaczenia przyjęte w rozważaniach:  $\Gamma$  — obszar górotworu,  $\Omega$  — obszar wyrobiska,  $S$  — kontur wyrobiska,  $\vec{u}$  — wektor przemieszczenia,  $\vec{n}$  — jednostkowy wektor normalny do konturu wyrobiska

Wielkość (6) pomimo tego, iż dobrze opisuje stan przemieszczenia, to nie zawiera informacji o tym w jakim stopniu może być wyężzona obudowa. Postulujemy zatem przyjęcie innej miary, w postaci wielkości energii odkształcenia objętościowego wyrobiska, wyrażonej jako:

$$E_0 = \frac{1}{2} K \int_{\Omega} (\epsilon_x + \epsilon_z)^2 d\Omega \quad (7)$$

gdzie  $K$  jest modułem odkształcenia objętościowego, zaś  $\epsilon_x$  oraz  $\epsilon_z$  oznaczają odkształcenia liniowe.

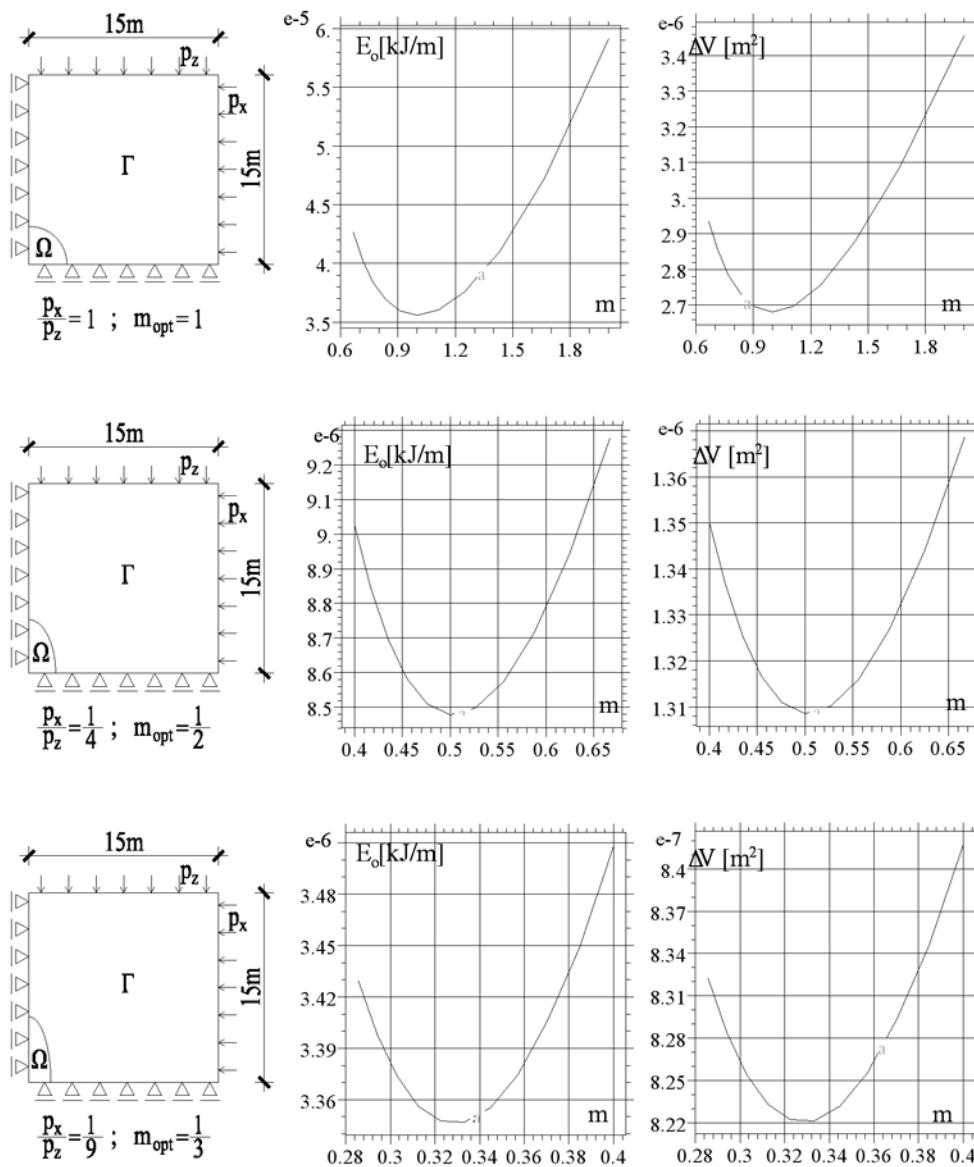
Miara zdefiniowana w ten sposób jest dodatnio określona oraz łatwiejsza w interpretacji. Wydaje się, że zarówno w przypadku przyjęcia miary (6) jak i (7), jako funkcji celu, otrzymane wyniki powinny być ze sobą zgodne. Hipoteza ta będzie weryfikowana w kolejnym rozdziale.

Warto w tym miejscu nadmienić, iż w celu numerycznego określenia wartości energii  $E_0$ , obszar  $\Omega$  (rys. 5) modelowany jest jako ośrodek ciągły. Szczegółowo zagadnienie określania wielkości (7) opisano w kolejnym rozdziale.

#### 4.1. Weryfikacja postawionej hipotezy

W celu zweryfikowania postawionej w poprzednim rozdziale hipotezy wykonano symulacje numeryczne z wykorzystaniem metody elementów skończonych — MES. Zastosowano komercyjny program FlexPDE [2]. Jak wspomniano wcześniej w obliczeniach przyjęto liniowo-sprężysty model ośrodka i ograniczono się do analizy zagadnienia dwuwymia-

rowego przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia (PSO). Przyjęto następujące wartości parametrów mechanicznych górotworu:  $E = 7e10$  Pa,  $\nu = 0,26$ . Podobnie jak w pracy [5] analizowane były przekroje o kształcie eliptycznym. Schemat rozważanego zagadnienia przedstawiony jest na rysunku 6.



Rys. 6. Schemat rozważanego zagadnienia oraz wartości  $E_0$  i  $\Delta V$  dla trzech różnych wartości stosunku  $p_x/p_z$

Obliczenia wykonano dla trzech różnych wartości stosunku  $p_x/p_z$ , tj.  $p_x/p_z = 1$ ,  $p_x/p_z = 1/4$  oraz  $p_x/p_z = 1/9$ . Dla każdego z tych trzech przypadków, zakładając stałą wartość  $p_z = 10$  kN/m, wykonano serię obliczeń dla różnych wartości  $m$ . Klasę rozważanych kształtów eliptycznych zawężono zakładając stałe pole przekroju, równe polu koła o promieniu  $R = 2,5$  m. Określano wartości energii odkształcenia objętościowego (7) oraz scałkowane po powierzchni konturu wyrobiska pole przemieszczeń, dane zależnością (6). Jak wspomniano wcześniej, w celu obliczania energii  $E_0$  skumulowanej w obszarze  $\Omega$  (rys. 5), w obliczeniach numerycznych obszar ten potraktowano, nie jako pustkę, ale jako ośrodek ciągły.

Wpływ sztywności wyrobiska na odkształcanie górotworu wyeliminowano poprzez przyjęcie dla materiału wypełnienia modułu odkształcalności o dziesięć rzędów mniejszego niż dla górotworu.

Wyniki obliczeń zaprezentowano w postaci wykresów na rysunku 6. Przedstawione wyniki dowodzą słuszności przyjętej hipotezy — we wszystkich przypadkach minimum, zarówno dla energii  $E_0$  oraz przemieszczenia  $\Delta V$ , jest osiągane dla tej samej wartości argumentu  $m$ . Tym samym oba sformułowania są równoważne. Nietrudno również zauważyć, iż rozwiązania te są dość stabilne, tj. jeśli  $m$  w małym stopniu odbiega od  $m_{opt}$ , to wartość funkcjonału optymalizacji również wykazuje niewielkie wahania. Dodatkowo wartość  $m$ , dla której obie rozważane funkcje osiągają minimum, jest zgodna z wartością  $m_{opt}$  podaną przez Sałustowicza (5). Przyjęta metoda optymalizacji wydaje się być zatem słuszną.

W dalszej części pracy stosować się będzie sformułowanie energetyczne optymalizacji, tj. przyjmując jako miarę energię  $E_0$ , przy czym rozważane będą kształty półelipsoidalne, odpowiadające rzeczywistym kształtom wyrobisk podziemnych.

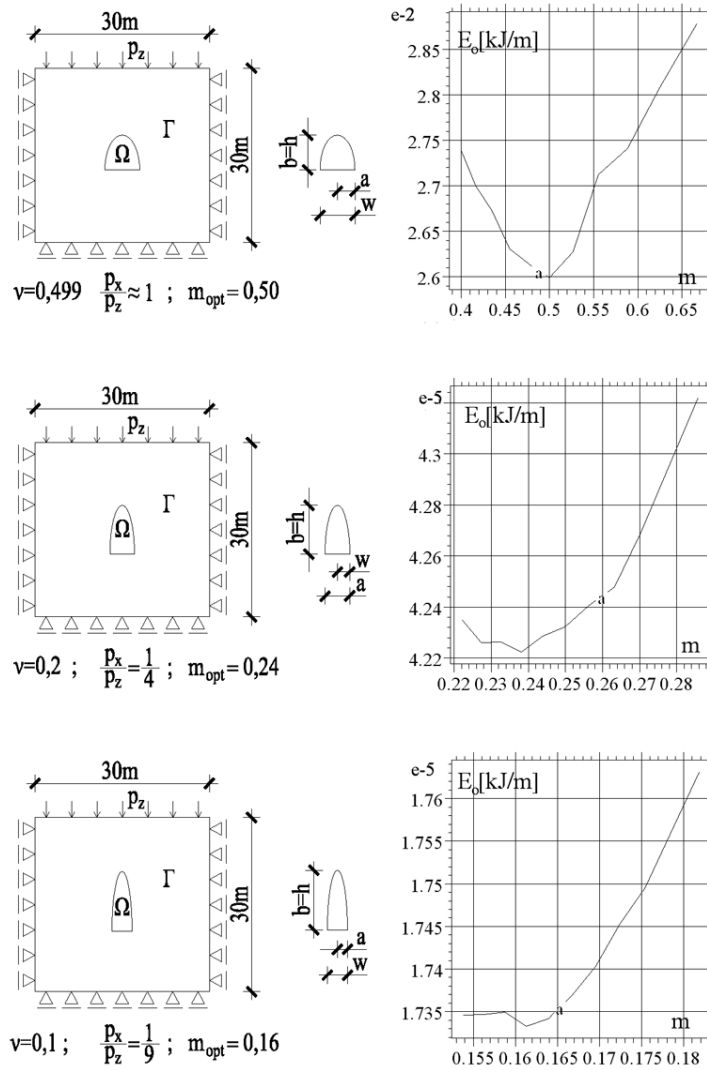
## 5. Analiza półelipsoidalnych kształtów wyrobisk podziemnych

Ostatecznej optymalizacji kształtu wyrobiska dokonano przyjmując kształt półeliptyczny. Obliczenia przeprowadzono dla kształtu stanowiącego połowę elipsy (rys. 7). Przyjęto te same wartości parametrów mechanicznych jak w poprzednim rozdziale. Ponieważ przekrój ten nie posiada dwóch osi symetrii, nie możemy ograniczyć rozważań do ćwiartki obszaru wokół tunelu, jak to było we wcześniejszym przykładzie. Zaproponowany został inny sposób obciążenia, stanowiący analogon edometru (rys. 7). Obciążenie pionowe przyjęto podobnie jak w rozdziale 4 —  $p_z = 10$  kN/m. Tym razem wartość stosunku  $p_x/p_z$  modyfikowano poprzez zmianę wartości współczynnika Poissona  $\nu$ , zgodnie z zależnością:

$$\frac{p_x}{p_z} = \frac{\nu}{1 - \nu}. \quad (8)$$

Analogicznie, jak w poprzednim przypadku, rozważano kształty o stałym polu powierzchni, równym polu koła o promieniu  $R = 2,5$  m.





Rys. 7. Schemat rozważanego zagadnienia oraz wartości  $E_0$  dla trzech różnych wartości stosunku  $p_x/p_z$

Wartości długości półosi elipsy, w zależności od wartości  $m$ , wyrażają się następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned}
 a &= R\sqrt{2m}, \\
 b &= \frac{R}{\sqrt{0,5m}}.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Jak wspomniano wcześniej tym razem określano jedynie wartości energii odkształcenia objętościowego  $E_0$  (7). Wyniki obliczeń, dla trzech różnych wartości stosunku  $p_x/p_z$ , zaprezentowano w postaci wykresów na rysunku 7. Zauważmy, że we wszystkich trzech przypadkach wartość argumentu  $m$ , dla której funkcja  $E_0$  osiąga minimum, w przybliżeniu równa jest:

$$m_{opt} = \left(\frac{a}{b}\right)_{opt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p_x}{p_z}}. \quad (10)$$

Zatem wartość  $m_{opt}$  jest o połowę mniejsza niż we wcześniej rozważanym przykładzie. Jeśli dodatkowo wprowadzić pojęcie szerokości oraz wysokości wyrobiska (rys. 7), to warunek optymalności (10) można przedstawić w postaci:

$$m_{opt} = \left(\frac{w}{h}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{p_x}{p_z}}, \quad (11)$$

gdzie:

- $w$  — szerokość wyrobiska ( $w = 2a$ );
- $h$  — wysokość wyrobiska ( $h = b$ ).

Z przeprowadzonych analiz, dla rozpatrywanego kształtu wyrobiska, jednoznacznie wynika, że najbardziej optymalny stosunek szerokości wyrobiska do jego wysokości równy jest pierwiastkowi ze stosunku obciążeń, poziomego  $p_x$  do pionowego  $p_z$ . Zależność (11) przyjmuje się zatem jako ostateczny warunek optymalizacji półelipsoidalnych przekrojów wyrobisk podziemnych.

## 6. Wnioski

W artykule przedstawiono procedurę optymalizacji kształtu wyrobisk podziemnych ze względu na wyężenie obudowy. W szczególności sformułowano funkcję celu w dwóch różnych ujęciach — scałkowanego pola przemieszczeń konturu wyrobiska (6) oraz energii odkształcenia objętościowego skumulowanej w obszarze wyrobiska (7).

Dla eliptycznych kształtów wyrobisk podziemnych, we wszystkich rozważanych przypadkach minimum, zarówno dla energii  $E_0$  oraz przemieszczenia  $\Delta V$ , osiągane jest dla tej samej wartości argumentu — stosunku półosi elipsy  $m$ . Ponadto optymalna wartość  $m$  (dla której obie rozważane funkcje osiągają minimum) jest zgodna z wartością  $m_{opt}$  podaną przez Sałustowicza — zależność (5). W przypadku, gdy analizowano bardziej rzeczywiste kształty przekrojów (półeliptyczne) ograniczono się do rozpatrywania funkcji celu jedynie w postaci energii  $E_0$ .

Wyniki obliczeń przedstawione nr rysunku 7 dokumentują, iż we wszystkich przypadkach wartość argumentu  $m$ , dla której funkcja  $E_0$  osiąga minimum, jest o połowę mniejsza niż w poprzednim przykładzie (10). Ponadto zdefiniowano wartość  $m_{opt}$  w funkcji szerokości wyrobiska  $w$  oraz jego wysokości  $h$ , przy czym  $w = 2a$  oraz  $h = b$ . Wówczas, za najbardziej optymalny stosunek szerokości wyrobiska do jego wysokości, uznaje się ten, który równy jest pierwiastkowi ze stosunku obciążeń, poziomego  $p_x$  do pionowego  $p_z$  — zależność (11).

Należy odnotować, że niniejsza praca stanowi jedynie wstęp do zagadnienia optymalizacji kształtu obudowy. Zagadnienie to jest bardziej złożone niż rozpatrywane w pracy optymalizowanie kształtu wyrobiska. Ponadto w pracy ograniczono się do traktowania górotworu jako ośrodka liniowo sprężystego bez uwzględniania sprężysto-plastycznego lub sprężysto-plastyczno-kruchego modelu.

W tym miejscu autorzy pragną podziękować dr. hab. Dariuszowi Łydzbie za wprowadzenie do ciekawej tematyki badawczej. Jednocześnie duże słowa podziękowania należą się również dr. inż. Markowi Kawie, który wniósł znaczący wkład w rozwiązanie zagadnień przedstawionych w tej pracy.

#### LITERATURA

- [1] *Cherkaev A.*: Variational Methods for Structural Optimization, New York, Springer 2000
- [2] FlexPDE 5, User Guide, PDE Solutions Inc. 2005
- [3] *Huber M.T.*: Teoria sprężystości, Kraków, Polska Akademia Umiejętności 1950
- [4] *Ren G., Smith J.V., Tang J.W., Xie Y.M.*: Underground excavation shape optimization using an evolutionary procedure, Computers and Geotechnics, 32, 2005, s. 122–132
- [5] *Saustowicz A.*: Zarys mechaniki górotworu. Katowice, Wydawnictwo „Śląsk” 1968
- [6] *Xie Y.M., Steven G.P.*: A simple evolutionary procedure for structural optimization, Comput Struct 1993, 49 (5), s.885–96
- [7] *Xie Y.M., Steven G.P.*: Evolutionary structural optimization, Berlin Springer 1997