

Marek Ciał, Marian Paluch*, Antoni Tajduś**

NIELINIOWA DEFORMACJA IZOTROPOWEJ SFERY GRUBOŚCIENNEJ

1. Wprowadzenie

Paliwa ciekłe i gazowe lub inne płyny mogą być magazynowane w naziemnych lub podziemnych zbiornikach o różnych kształtach. Tutaj zajęto się zbiornikami o kształcie kulistym. Założono, że ściany (obudowa) zbiornika wykonane są z materiału opisanego przez potencjał Mooney'a. W przypadku zbiorników naziemnych, ich ściany będą podlegały obciążeniu wewnętrznemu pochodzącemu od magazynowanego płynu. Obciążenie zewnętrzne zbiornika naziemnego (ciśnienie atmosferyczne) będzie stosunkowo niewielkie. Dla zbiorników podziemnych, zarówno obciążenie wewnętrzne (od magazynowanego płynu) jak i obciążenie zewnętrzne (od górotworu) mogą przyjmować zróżnicowane wartości. W zależności od lokalizacji zbiornika, jego gabarytów oraz pierwotnego stanu naprężenia w górotworze, obciążenie zewnętrzne może być większe lub mniejsze od obciążenia wewnętrznego. Z tych względów, w referacie przedstawiono rozwiązanie ogólne dla czterech przypadków różniących się obciążeniem zbiornika.

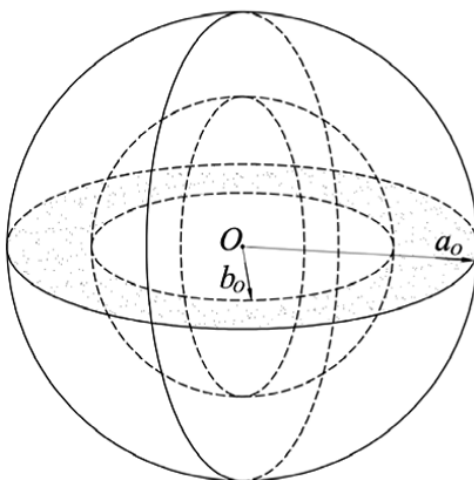
2. Określenie składowych tensora naprężenia i odkształcenia

W trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa rozważamy grubościenną sferę, która w naturalnym niezdeformowanym stanie — konfiguracja początkowa B_0 ma wymiary: promienie a_0, b_0 — rysunek 1. W konfiguracji odkształconej czyli aktualnej \mathbf{B} jej wymiary są a i b — rysunek 2.

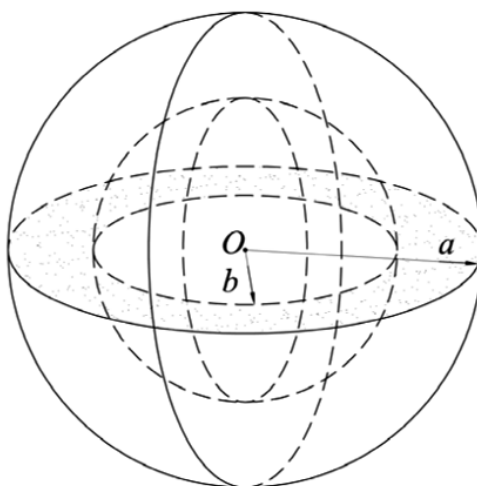
Grubościenna sfera może być obciążona ciśnieniem wewnętrznym q_w lub zewnętrznym q_z . Możliwy jest też przypadek, gdy oba obciążenia działają równocześnie. Jest ona wykonana z materiału opisanego przez potencjał Mooney'a. W pracy dla przyjętych równań

* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

deformacyjnych wyznaczone zostaną: rozkład naprężeń w punktach ciała oraz elementy tensora odkształcenia jak również promieniowe przemieszczenia.



Rys. 1. Konfiguracja początkowa ciała B_0



Rys. 2. Konfiguracja odkształcona B

Tak sformułowany technicznie problem grubościowej sfery należy ująć w kategoriach formalnych mechaniki. W tym celu wykorzystamy równania nieliniowej geometrycznej i fizycznej teorii ośrodków odkształcalnych.

2.1. Komplet równań nieliniowej teorii sprężystości w opisie konwekcyjnym [2]

Równania deformacyjne mają postać:

$$\begin{cases} x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ y^i = y^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Równania geometryczne można zapisać jako:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(G_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} + u^\rho|_{\alpha} u_{\rho|\beta}) \quad \alpha, \beta, \rho = 1, 2, 3 \quad (2)$$

Równania fizyczne (konstrytywne) dla ciała Mooney'a mają postać:

$$\tau^{\alpha\beta} = 2C_1 g^{\alpha\beta} + 2C_2 B^{\alpha\beta} + pG^{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (3)$$

$$I_3 = 1$$

gdzie:

- C_1, C_2 — są stałymi materiałowymi,
- p — nieznanym ciśnieniem hydrostatycznym,
- I_1, I_2, I_3 — niezmiennikami tensora γ_{β}^{α} .

Równania równowagi mają postać:

$$\tau^{\alpha\beta}|_{\alpha} + b^{\beta} = 0 \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (4)$$

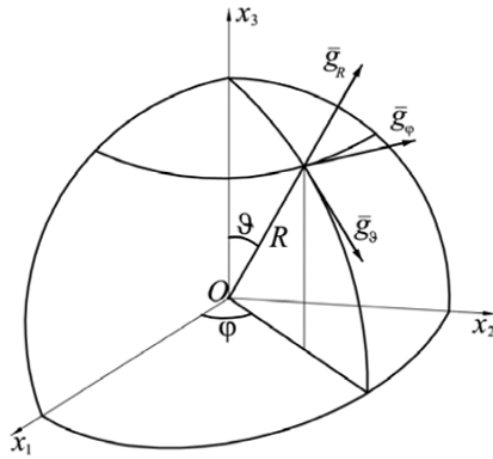
Warunki brzegowe typu naprężeniowego można zapisać jako:

$$q^{\alpha} = \tau^{\beta\alpha} n_{\beta} = \tau^{\alpha\beta} n_{\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (5)$$

2.2. Wyznaczenie postaci funkcji opisującej deformację ciała

Zgodnie z rysunkiem 1, w [B0] przyjęto układ współrzędnych kartezjańskich $\{x_i\}$ związany ze współrzędnymi sferycznymi (konwekcyjnymi) $\{\theta^{\alpha}\}$ (rys. 3) zależnością:

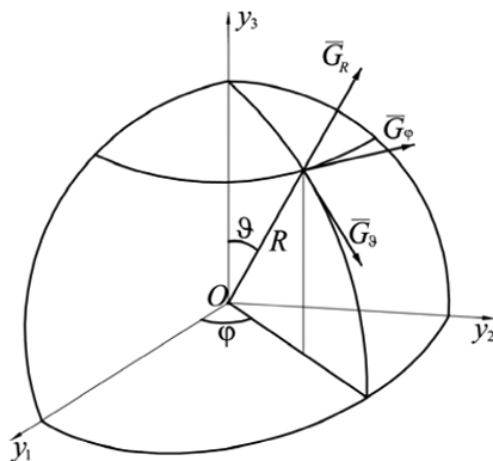
$$\bar{r} : \begin{cases} x_1 = f(R) \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_2 = f(R) \sin \vartheta \sin \varphi \\ x_3 = f(R) \cos \vartheta \end{cases} \quad (6)$$



Rys. 3. Układ współrzędnych sferycznych w konfiguracji początkowej $\boxed{B_0}$

Przyjęto tutaj współrzędne konwekcyjne $\theta^1 = R$, $\theta^2 = \vartheta$, $\theta^3 = \varphi$. W konfiguracji aktualnej \boxed{B} współrzędne kartezjańskie $\{y_i\}$ związane są ze współrzędnymi sferycznymi (rys. 4) zależnością:

$$\bar{R} : \begin{cases} y_1 = R \sin \vartheta \cos \varphi \\ y_2 = R \sin \vartheta \sin \varphi \\ y_3 = R \cos \vartheta \end{cases} \quad (7)$$



Rys. 4. Układ współrzędnych sferycznych w konfiguracji aktualnej \boxed{B}

Funkcja $f(R)$ opisująca deformację ciała będzie wyznaczona z warunku nieściśliwości $I_3 = 1$. Tensory metryczne w konfiguracji aktualnej **[B]**

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_i}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial y_i}{\partial \theta^\beta}, \quad G^{\alpha\beta} = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial y^i}$$

$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (G^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$G = \det G_{\alpha\beta} = R^4 \sin^2 \vartheta$$

Tensory metryczne w **[B0]**

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial \theta^\beta}, \quad g^{\alpha\beta} = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^i}, \quad g = \det g_{\alpha\beta}$$

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} (f'_R)^2 & 0 & 0 \\ 0 & f^2 & 0 \\ 0 & 0 & f^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(f'_R)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$g = \det g_{\alpha\beta} = f^4 (f'_R)^2 \sin^2 \vartheta$$

Z warunku nieściśliwości:

$$I_3 = \frac{G}{g} = 1 \quad (10)$$

otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$f^2 df = R^2 dR \quad (11)$$

Rozwiązaniem równania (8) jest funkcja:

$$f(R) = \sqrt[3]{C + R^3} \quad (12)$$

Stałą C wyznaczamy z warunku:

$$f(R) = R_o \quad (13)$$

$$C = R_o^3 - R^3 = a_o^3 - a^3$$

Zatem:

$$f(R) = \sqrt[3]{1 + \left(1 - \frac{a^3}{a_o^3}\right) \frac{a_o^3}{R^3}} R \quad (14)$$

Oznaczmy:

$$\frac{a}{a_o} = \lambda, \quad \frac{b}{b_o} = \delta \quad (15)$$

Stąd:

$$f(R) = \sqrt[3]{1 + (1 - \lambda^3) \frac{a_o^3}{R^3}} R \quad (16)$$

$$f(a) = \frac{a}{\lambda} = a_o \quad (17)$$

$$f(b) = \sqrt[3]{\delta^3 + (1 - \lambda^3) \frac{a_o^3}{b_o^3}} b_o = b_o \quad (18)$$

We wzorze (18) wartość pod pierwiastkiem jest równa 1, z czego wynika, że zachodzi:

$$(\lambda^3 - 1)a_o^3 = (\delta^3 - 1)b_o^3 \quad (19)$$

$$\lambda = \sqrt[3]{1 + (\delta^3 - 1) \left(\frac{b_o}{a_o}\right)^3}, \quad \delta = \sqrt[3]{1 + (\lambda^3 - 1) \left(\frac{a_o}{b_o}\right)^3} \quad (20)$$

Ponieważ:

$$\frac{df}{dR} = f'_R = \left(\frac{R}{f}\right)^2 \quad (21)$$

to:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{R^4}{f^4} & 0 & 0 \\ 0 & f^2 & 0 \\ 0 & 0 & f^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{f^4}{R^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Niezmienniki tensora odkształcenia można wyznaczyć ze wzoru:

$$\gamma_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\phi} G_{\phi\beta} - \delta_{\beta}^{\alpha})$$

$$\begin{cases} I_1 = g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = \frac{f^4}{R^4} + \frac{2R^2}{f^2} \\ I_2 = G_{\alpha\beta} G_{\phi\psi} (g^{\alpha\beta} g^{\phi\psi} - g^{\alpha\phi} g^{\beta\psi}) = \frac{f^4}{R^4} + \frac{2R^2}{f^2} = I_1 \\ I_3 = \frac{G}{g} = 1 \end{cases} \quad (23)$$

Tensor geometrii $B = (B^{\alpha\beta})$ można przedstawić w postaci:

$$B^{\alpha\beta} = G_{\phi\psi} (g^{\alpha\beta} g^{\phi\psi} - g^{\alpha\phi} g^{\beta\psi})$$

$$(B^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{2f^2}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^2}{R^4} + \frac{R^2}{f^4} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{f^2}{R^4} + \frac{R^2}{f^4}\right) \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \end{pmatrix} \quad (24)$$

2.3. Wyznaczenie elementów tensora naprężenia $\tau^{\alpha\beta}$ dla ciała Mooney'a

Korzystając ze wzoru (3) obliczamy:

$$\begin{cases} \tau^{11} = \sigma_{11} = 2C_1 \frac{f^4}{R^4} + 4C_2 \frac{f^2}{R^2} + p \\ R^2 \tau^{22} = \sigma_{22} = 2C_1 \frac{R^2}{f^2} + 2C_2 \left(\frac{R^4}{f^4} + \frac{f^2}{R^2} \right) + p \\ R^2 \sin^2 \vartheta \tau^{33} = \sigma_{33} = 2C_1 \frac{R^2}{f^2} + 2C_2 \left(\frac{R^4}{f^4} + \frac{f^2}{R^2} \right) + p \end{cases} \quad (25)$$

Pozostałe elementy tensora naprężenia we współrzędnych fizycznych są równe zero. Równania równowagi (4) w układzie współrzędnych sferycznych można zapisać jako:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau^{11}}{\partial R} + \frac{\partial \tau^{21}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau^{31}}{\partial \varphi} + \frac{2}{R} \tau^{11} - R \tau^{22} - R \tau^{33} \sin^2 \vartheta + \tau^{12} \operatorname{ctg} \vartheta = 0 \\ \frac{\partial \tau^{12}}{\partial R} + \frac{\partial \tau^{22}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau^{32}}{\partial \varphi} + \tau^{22} \operatorname{ctg} \vartheta - \tau^{33} \frac{\sin 2\vartheta}{2} + \frac{4}{R} \tau^{12} = 0 \\ \frac{\partial \tau^{13}}{\partial R} + \frac{\partial \tau^{23}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau^{33}}{\partial \varphi} + \frac{2}{R} \tau^{13} + 3\tau^{23} \operatorname{ctg} \vartheta = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Z równań (26) wynika $p(R, \vartheta, \varphi) = p(R)$. Nieznane ciśnienie hydrostatyczne $p(R)$ wyznaczmy z pierwszego równania równowagi (26):

$$\frac{dp}{dR} = 4C_1 \left(\frac{f^4}{R^5} + \frac{R}{f^2} - \frac{2f}{R^2} \right) + 4C_2 \left(\frac{f^2}{R^3} + \frac{R^3}{f^4} - \frac{2}{f} \right) \quad (27)$$

Pozostałe dwa równania (26) są spełnione tożsamościowo. Po przełączeniu równania (27) po zmiennej R otrzymujemy:

$$p(R) = C_1 \left(\frac{4f}{R} - \frac{f^4}{R^4} \right) - 2C_2 \left(\frac{f^2}{R^2} + \frac{2R}{f} \right) + p_0 \quad (28)$$

We wzorze (28) p_0 jest stałą która będzie wyznaczona dla zadanego obciążenia z warunku naprężeniowego.

Podstawiając (28) do (25) znajdujemy ostateczną postać wzorów na naprężenia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^{11} = \sigma_{11} = C_1 \left(\frac{f^4}{R^4} + \frac{4f}{R} \right) + 2C_2 \left(\frac{f^2}{R^2} - \frac{2R}{f} \right) + p_0 \\ R^2 \tau^{22} = \sigma_{22} = C_1 \left(\frac{2R^2}{f^2} + \frac{4f}{R} - \frac{f^4}{R^4} \right) + 2C_2 \left(\frac{R^4}{f^4} - \frac{2R}{f} \right) + p_0 \\ R^2 \sin^2 \vartheta \tau^{33} = \sigma_{33} = C_1 \left(\frac{2R^2}{f^2} + \frac{4f}{R} - \frac{f^4}{R^4} \right) + 2C_2 \left(\frac{R^4}{f^4} - \frac{2R}{f} \right) + p_0 \\ \sigma_{ij} = 0, \quad i \neq j \end{array} \right. \quad (29)$$

Naprężeniom (29) odpowiadają składowe tensora odkształcenia $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{11} = \varepsilon_{11} = \frac{f^4 - R^4}{2f^4} \\ \frac{\gamma_{22}}{R^2} = \varepsilon_{22} = \frac{R^2 - f^2}{2R^2} \\ \frac{\gamma_{33}}{R^2 \sin^2 \vartheta} = \varepsilon_{33} = \frac{R^2 - f^2}{2R^2}, \\ f(R) = \sqrt[3]{1 + (1 - \lambda^3) \frac{a_0^3}{R^3}} \end{array} \right. \quad (30)$$

Tensorzy $\tau^{\alpha\beta}$ i $\gamma_{\alpha\beta}$ zostały wyznaczone dla związków deformacyjnych:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sqrt[3]{1 + (1 - \lambda^3) \frac{a_0^3}{R^3}} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_2 = \sqrt[3]{1 + (1 - \lambda^3) \frac{a_0^3}{R^3}} R \sin \vartheta \sin \varphi \\ x_3 = \sqrt[3]{1 + (1 - \lambda^3) \frac{a_0^3}{R^3}} R \cos \vartheta, \quad \lambda = \frac{a}{a_0} \end{array} \right. \quad (31)$$

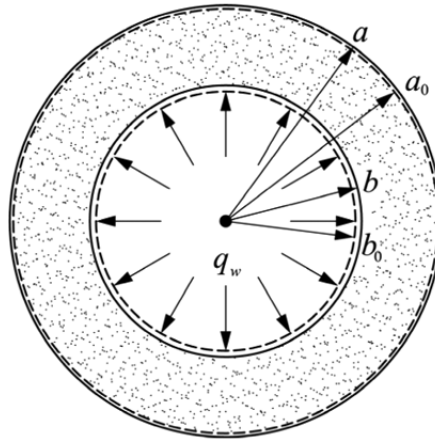
Przemieszczenie promieniowe wyraża się zależnością:

$$u_R = \left(1 - \sqrt[3]{1 + (1 - \lambda^3) \frac{a_0^3}{R^3}} \right) R \quad (32)$$

2.4. Przypadek 1 — grubościenna sfera obciążona ciśnieniem wewnętrznym q_w — rysunek 5

Z warunku naprężeniowego $\tau^{11}|_{R=a} = 0$ wyznaczamy stałą p_0 :

$$\begin{aligned} p_0 &= C_1 \left(-\frac{f^4(a)}{a^4} - \frac{4f(a)}{a} \right) + C_2 \left(-\frac{2f^2(a)}{a^2} + \frac{4a}{f(a)} \right) = \\ &= C_1 (-\lambda^{-4} - 4\lambda^{-1}) + C_2 (-2\lambda^{-2} + 4\lambda) \end{aligned}$$



Rys. 5. Przekrój środkowy grubościennej sfery z obciążeniem wewnętrznym q_w

Zatem składowe fizyczne tensora naprężenia wyrażają się następująco:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = C_1 \left(\frac{f^4}{R^4} + \frac{4f}{R} - \lambda^{-4} - 4\lambda^{-1} \right) + 2C_2 \left(\frac{f^2}{R^2} - \frac{2R}{f} - \lambda^{-2} + 2\lambda \right) \\ \sigma_{22} = \sigma_{33} = C_1 \left(\frac{2R^2}{f^2} + \frac{4f}{R} - \frac{f^4}{R^4} - \lambda^{-4} - 4\lambda^{-1} \right) + 2C_2 \left(\frac{R^4}{f^4} - \frac{2R}{f} - \lambda^{-2} + 2\lambda \right) \end{cases}$$

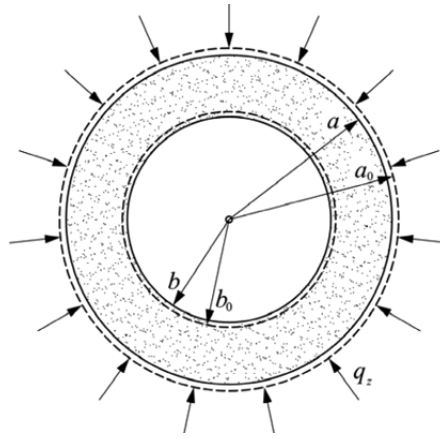
Warunek $\tau_{11}|_{R=b} = -q_w$ wiąże ciśnienie wewnętrzne q_w z parametrami deformacji λ i δ :

$$q_w = C_1 (\lambda^{-4} + 4\lambda^{-1} - \delta^{-4} - 4\delta^{-1}) + C_2 (2\lambda^{-2} - 4\lambda - 2\delta^{-2} + 4\delta)$$

2.5. Przypadek 2 — grubościenna sfera obciążona ciśnieniem zewnętrznym q_z — rysunek 6

Z warunku naprężeniowego $\tau^{11}|_{R=b} = 0$ wyznaczamy stałą p_0 :

$$\begin{aligned} p_0 &= C_1 \left(-\frac{f^4(b)}{b^4} - \frac{4f(b)}{b} \right) + C_2 \left(-\frac{2f^2(b)}{b^2} + \frac{4b}{f(b)} \right) = \\ &= C_1 (-\delta^{-4} - 4\delta^{-1}) + C_2 (-2\delta^{-2} + 4\delta) \end{aligned}$$



Rys. 6. Przekrój środkowy grubościennej sfery z obciążeniem zewnętrznym q_z .

Zatem składowe fizyczne tensora naprężenia wyrażają się następująco:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = C_1 \left(\frac{f^4}{R^4} + \frac{4f}{R} - \delta^{-4} - 4\delta^{-1} \right) + 2C_2 \left(\frac{f^2}{R^2} - \frac{2R}{f} - \delta^{-2} + 2\delta \right) \\ \sigma_{22} = \sigma_{33} = C_1 \left(\frac{2R^2}{f^2} + \frac{4f}{R} - \frac{f^4}{R^4} - \delta^{-4} - 4\delta^{-1} \right) + 2C_2 \left(\frac{R^4}{f^4} - \frac{2R}{f} - \delta^{-2} + 2\delta \right) \end{cases}$$

Warunek $\tau_{11}|_{R=a} = -q_z$ wiąże ciśnienie zewnętrzne q_z z parametrami deformacji λ i δ :

$$q_z = C_1 (\delta^{-4} + 4\delta^{-1} - \lambda^{-4} - 4\lambda^{-1}) + C_2 (2\delta^{-2} - 4\delta - 2\lambda^{-2} + 4\lambda)$$

2.6. Przypadek 3 i 4 — grubościenna sfera obciążona równocześnie ciśnieniem zewnętrznym q_z i wewnętrznym q_w

Z warunków naprężeniowych dla brzegu $R = a$ i $R = b$ wyznaczmy stałą p_0 oraz zależność pomiędzy ciśnieniami q_z i q_w .

$$\begin{cases} \tau_{11} |_{R=a} = -q_z \\ \tau_{11} |_{R=b} = -q_w \end{cases}$$

$$\tau^{11} = C_1 \left(\frac{f^4}{R^4} + \frac{4f}{R} \right) + 2C_2 \left(\frac{f^2}{R^2} - \frac{2R}{f} \right) + p_0$$

$$\begin{cases} -q_z = C_1 \left(\frac{f^4(a)}{a^4} + \frac{4f(a)}{a} \right) + 2C_2 \left(\frac{f^2(a)}{a^2} - \frac{2a}{f(a)} \right) + p_0 \\ -q_w = C_1 \left(\frac{f^4(b)}{b^4} + \frac{4f(b)}{b} \right) + 2C_2 \left(\frac{f^2(b)}{b^2} - \frac{2b}{f(b)} \right) + p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -q_z = C_1(\lambda^{-4} + 4\lambda^{-1}) + 2C_2(\lambda^{-2} - 2\lambda) + p_0 \\ -q_w = C_1(\delta^{-4} + 4\delta^{-1}) + 2C_2(\delta^{-2} - 2\delta) + p_0 \end{cases}$$

$$q_z - q_w = C_1(\delta^{-4} - \lambda^{-4} - 4\lambda^{-1}) + 2C_2(\delta^{-2} - \lambda^{-2} - 2\delta + 2\lambda)$$

Stąd dla zadanego q_w wyznaczamy q_z

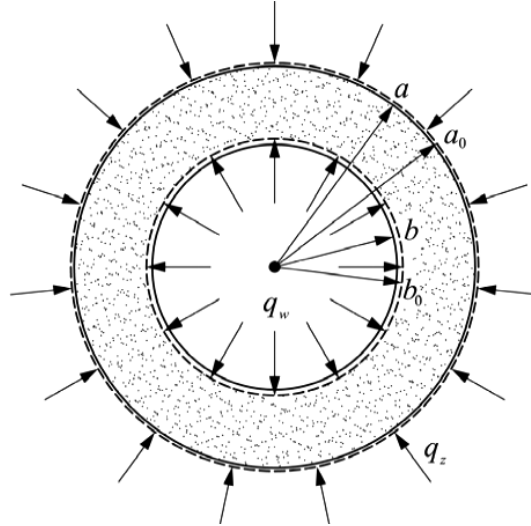
$$q_z = q_w + C_1(\delta^{-4} - \lambda^{-4} + 4\delta^{-1} - 4\lambda^{-1}) + 2C_2(\delta^{-2} - \lambda^{-2} - 2\delta + 2\lambda)$$

$$p_0 = -q_z - C_1(\lambda^{-4} + 4\lambda^{-1}) - 2C_2(\lambda^{-2} - 2\lambda) = -q_w - C_1(\delta^{-4} + 4\delta^{-1}) - 2C_2(\delta^{-2} - 2\delta)$$

Wymiary a , b , a_0 , b_0 wynikające z nieściśliwości materiału:

$$a^3 - b^3 = a_0^3 - b_0^3$$

Załóżmy, że w przypadku 3 występuje: $q_z > q_w$ (rys. 7).



Rys. 7. Przekrój sfery grubościennej obciążonej ciśnieniem wewnętrznym i zewnętrznym, $q_z > q_w$

Wtedy otrzymujemy:

$$\sigma_{11} = C_1 \left(\frac{f^4}{R^4} + \frac{4f}{R} - \delta^{-4} - 4\delta^{-1} \right) + C_2 \left(2 \frac{f^2}{R^2} - 4 \frac{R}{f} - 2\delta^{-2} + 4\delta \right) - q_w$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = C_1 \left(\frac{2R^2}{f^2} + 4 \frac{f}{R} - \frac{f^4}{R^4} - \delta^{-4} - 4\delta^{-1} \right) + C_2 \left(\frac{2R^4}{f^4} - \frac{4R}{f} - 2\delta^{-2} + 4\delta \right) - q_w$$

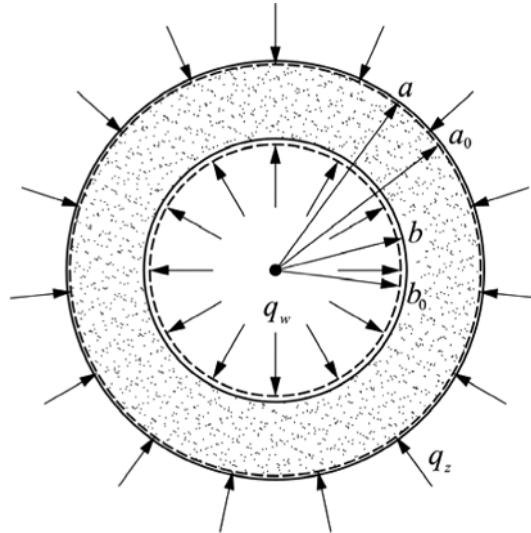
Załóżmy, że w przypadku 4 występuje: $q_w > q_z$ (rys. 8).

Wtedy otrzymujemy

$$\sigma_{11} = C_1 \left(\frac{f^4}{R^4} + \frac{4f}{R} - \lambda^{-4} - 4\lambda^{-1} \right) + C_2 \left(2 \frac{f^2}{R^2} - 4 \frac{R}{f} - 2\lambda^{-2} + 4\lambda \right) - q_z$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = C_1 \left(\frac{2R^2}{f^2} + 4 \frac{f}{R} - \frac{f^4}{R^4} - \lambda^{-4} - 4\lambda^{-1} \right) + C_2 \left(\frac{2R^4}{f^4} - \frac{4R}{f} - 2\lambda^{-2} + 4\lambda \right) - q_z$$

$$q_w = q_z - C_1 (\delta^{-4} - \lambda^{-4} + 4\delta^{-1} - 4\lambda^{-1}) - 2C_2 (\delta^{-2} - \lambda^{-2} - 2\delta + 2\lambda)$$



Rys. 8. Przekrój sfery grubościennej obciążonej ciśnieniem wewnętrznym i zewnętrznym, $q_w > q_z$

3. Podsumowanie

Powyżej przedstawiono rozwiązanie zamknięte pozwalające na określenie składowych stanu naprężenia i przemieszczenia dla kulistych zbiorników naziemnych i podziemnych. Problem rozwiązano w oparciu o równania nieliniowej teorii sprężystości dla czterech przypadków obciążenia. Zaprezentowane rozwiązania mogą znaleźć zastosowania we wstępnych stadiach projektowania naziemnych i podziemnych kulistych zbiorników magazynowych.

LITERATURA

- [1] *Green A.E., Adkins J.E.*: Large Elastic Deformations. Clarendon Press, Oxford, 1960
- [2] *Paluch M.*: Podstawy teorii sprężystości i plastyczności z przykładami. Wyd. P.K., Kraków, 2006
- [3] *Rymarz Cz.*: Mechanika ośrodków ciągłych. PWN, Warszawa, 1993
- [4] *Wesołowski Z., Woźniak Cz.*: Podstawy nieliniowej teorii sprężystości. PWN, Warszawa, 1970