

*Marian Paluch\**

## KORZYŚCI PŁYNĄCE ZE STOSOWANIA ZASADY PRAC WIRTUALNYCH NA PRZYKŁADZIE MECHANIKI OGÓLNEJ

---

### 1. Wprowadzenie

W pracy kierując się dewizą Johna Zimana: „Celem nauki jest zrozumienie, nie zaś gromadzenie danych i wzorów” pokazano jak ważną rolę odgrywa w Mechanice Ogólnej Zasada Prac Wirtualnych. Zostały zdefiniowane więzy układu materialnego, przesunięcia wirtualne, wyprowadzono równanie zasady prac wirtualnych oraz podano przykłady, z których widać korzyści wynikające z jej stosowania.

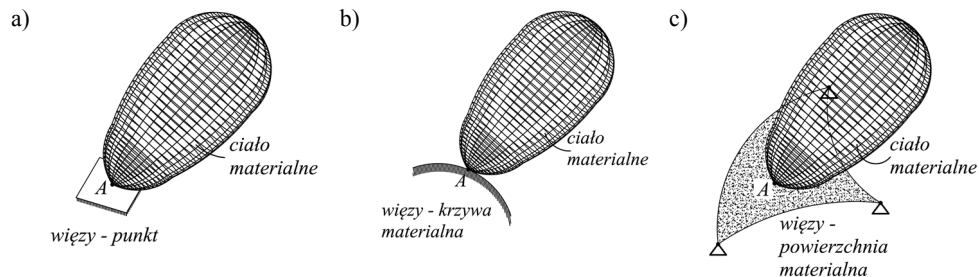
### 2. Więzy układu materialnego

Wszystko, co widzimy stanowi układ materialny. Układ materialny, którego ruch odbywa się bez żadnych ograniczeń nazywamy układem swobodnym. Gdy na ruch układu (ciała) nałożone są ograniczenia (więzy) to taki układ jest nieswobodny. Więzy, czyli ograniczenia ruchu ciała może stanowić: punkt materialny, krzywa materialna, powierzchnia materialna (rys. 1) itp.

Przy układach nieswobodnych wykorzystuje się postulat (hipotezę) o więzach [2–4] tzw. zasadę oswobodzenia więzów. Głosi ona: w ruchu układu materialnego nieswobodnego nic się nie zmienia, jeżeli więzy myślowo usuniemy, a ich działanie zastąpimy siłami zwanymi reakcjami. Siły reakcji występują w miejscach styku ciała z więzami. Tak więc ruch ciała nieswobodnego możemy analizować jak ruch ciała swobodnego z tym, że do sił zewnętrznych (czynnych) należy dołączyć siły oddziaływań więzów zwane siłami reakcji (biernymi).

---

\* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków



Rys. 1. Więzy układu materialnego

Siły bierne pojawiają się w więzach, gdy zadziałają siły czynne. Więzy układu materialnego dzielimy na:

I.

- stacjonarne (niezależne od czasu)

$$f(x, y, z) \leq 0 \quad (1)$$

- niestacjonarne (zależne od czasu)

$$f(x, y, z, t) \leq 0 \quad (2)$$

II.

- geometryczne — ograniczają położenie punktów materialnego ciała

$$f(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

- kinematyczne — ograniczają prędkości punktów materialnego ciała

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0 \quad (4)$$

III.

- dwustronne — zapisane przy pomocy równości

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (5)$$

- jednostronne — zapisane przy pomocy nierówności

$$f(x, y, z, t) \geq 0 \quad (6)$$

IV.

— gładkie (beztarciowe)

$$L_R = 0 \quad (7)$$

— chropowate (szorstkie)

$$L_R \neq 0 \quad (8)$$

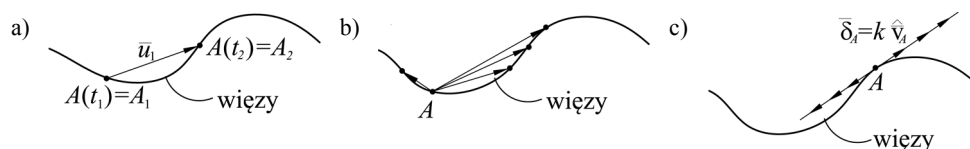
gdzie praca reakcji  $\bar{R}_A$  na odcinku  $AB$  jest równa

$$L_R = \bar{R}_A \cdot \overline{AB} \quad (9)$$

Te same więzy mogą być jednocześnie np. stacjonarne, geometryczne, gładkie i dwustronne.

## 2. Przesunięcia wirtualne punktów ciała sztywnego

Dla punktów ciała materialnego (rys. 2) wprowadza się pojęcie przesunięcia: a) rzeczywistego, b) możliwego, c) wirtualnego (przygotowanego).



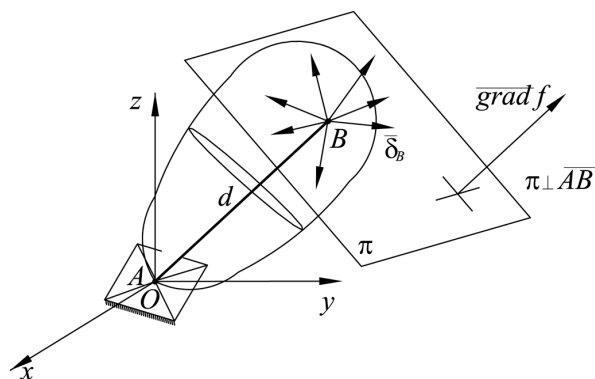
**Rys. 2.** Przesunięcia punktów ciała:  
a) rzeczywiste, b) możliwe, c) wirtualne (przygotowane)

Przesunięcie rzeczywiste jest wektorem łączącym dwa rzeczywiste położenia punktu, a więc zależy od więzów i sił działających. Przesunięcie możliwe stanowi wektor łączący dwa możliwe położenia punktu (zależy tylko od więzów). Widać stąd, że przesunięcie rzeczywiste jest możliwym, natomiast możliwe nie musi być rzeczywistym, gdyż z całej rodziny przesunięć możliwych tylko jedno jest rzeczywiste.

Przesunięciem wirtualnym  $\bar{\delta}_A$  punktu  $A$  jest każdy wektor współliniowy z prędkością możliwą  $\hat{v}_A$  punktu, a prędkość możliwa jest to prędkość punktu na jaką zezwalają więzy układu.

$$\bar{\delta}_A \stackrel{df}{=} k \hat{v}_A, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (10)$$

W przypadku ciała sztywnego (rys. 3) unieruchomionego w punkcie  $A$



Rys. 3. Przesunięcia wirtualne punktów ciała sztywnego

przesunięcie wirtualne  $\bar{\delta}_A$  punktu  $A$  jest zerowe, ponieważ punkt ten jest punktem nieruchomym.

$$\bar{\delta}_A = \bar{0} \text{ gdyż } \hat{v}_A = \bar{0} \quad (11)$$

Przesunięcie wirtualne  $\bar{\delta}_B$  punktu  $B$  leży w płaszczyźnie  $\pi \perp \overline{AB}$ .

Ponieważ punkt  $B$  jest w stałej odległości  $d$  od punktu  $A$ , to jego współrzędne  $x, y, z$  spełniają zależność:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - d^2 = 0 \quad (12)$$

Analizowane ciało może poruszać się ruchem kulistym wokół punktu  $A$ , zatem punkt  $B$  może mieć różne położenia, zależne od jednego parametru  $\tau$ :

$$f[x(\tau), y(\tau), z(\tau)] = 0 \quad (13)$$

Różniczkując równanie (13) po parametrze  $\tau$  otrzymujemy zależność:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} = 0 \quad (14)$$

Mnożąc równanie (14) przez parametr  $k \in R \setminus \{0\}$  i wprowadzając oznaczenia:

$$k \frac{dx}{d\tau} = \delta x, \quad k \frac{dy}{d\tau} = \delta y, \quad k \frac{dz}{d\tau} = \delta z \quad (15)$$

otrzymujemy warunek na wyznaczenie przemieszczenia wirtualnego punktu  $B$ .

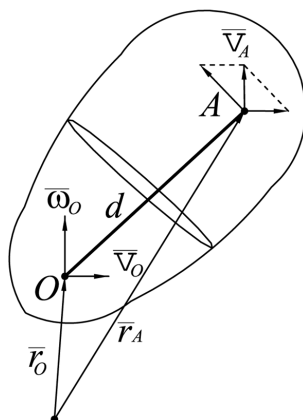
$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \Leftrightarrow \overline{grad f} \cdot \overline{\delta}_B = 0 \quad (16)$$

W dowolnym ruchu ciała sztywnego pomiędzy prędkościami jego punktów (rys. 4) np.  $O, A$  zachodzi zależność:

$$\overline{v}_A = \overline{v}_O + \overline{\omega}_O \times \overline{OA} \quad (17)$$

co wynika z równości

$$\overline{r}_A = \overline{r}_O + \overline{OA} \quad (18)$$



Rys. 4. Rozkład prędkości punktów ciała sztywnego

Zależność (17) ważna jest również dla prędkości możliwych.

$$\hat{v}_A = \hat{v}_O + \hat{\omega}_O \times \overline{OA} \quad (19)$$

Stąd dla  $k \in R \setminus \{0\}$  mamy:

$$k\hat{v}_A = k\hat{v}_O + k\hat{\omega}_O \times \overline{OA} \quad (20)$$

$$\overline{\delta}_A = \overline{\delta}_O + \overline{\delta}_{\omega_O} \times \overline{OA} \quad (21)$$

W równaniu (21) przemieszczenie wirtualne  $\bar{\delta}_A$  jest sumą przemieszczenia  $\bar{\delta}_0$  związanego z translacją ciała i przemieszczenia  $(\bar{\delta}_{\omega_0} \times \overline{OA})$  związanego z rotacją ciała.

### 3. Równanie Zasady Prac Wirtualnych

Dla nieswobodnego układu  $n$  punktów materialnych o więzach stacjonarnych, geometrycznych, dwustronnych i gładkich będącego w równowadze (spoczynek względem układu odniesienia) na podstawie zasady oswobodzenia więzów zachodzi:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i = \vec{0} \quad (22)$$

dla  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

gdzie:

$\vec{F}_i$  —  $i$ -ta siła zewnętrzna przyłożona do ciała w punkcie  $A_i$ ,

$\vec{R}_i$  —  $i$ -ta siła reakcji w punkcie  $B_i$ .

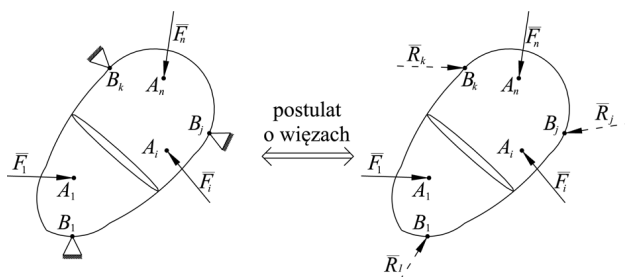
Po przemnożeniu równań (22) przez odpowiednie przesunięcie wirtualne  $\bar{\delta}_A$  i po zsumowanie stronami otrzymujemy równanie zasady prac wirtualnych

$$\delta L = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot \bar{\delta}_{A_i}) + \sum_{i=1}^n (\vec{R}_i \cdot \bar{\delta}_{B_i}) = 0, \quad \forall \bar{\delta}_i \quad (23)$$

Równanie (23) w przypadku więzów gładkich, dla których  $\delta L_R = 0$  wyraża się zależnością:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot \bar{\delta}_{A_i}) = 0, \quad \forall \bar{\delta}_{A_i} \quad (24)$$

Z zasady tej wyznaczamy równania równowagi układu sił działających na ciało sztywne swobodne lub nieswobodne. W tym celu dla ciała sztywnego nieswobodnego obciążonego układem sił (rys. 5) wykorzystano postulat oswobodzenia od więzów zastępując więzy siłami reakcji.



Rys. 5. Układ sił działający na ciało sztywne

Przesunięcie wirtualne punktów przyłożenia sił czynnych:

$$\bar{\delta}_{A_i} = \bar{\delta}_O + \bar{\delta}_{\omega_o} \times \overline{OA_i} \quad (25)$$

Przesunięcie wirtualne punktów przyłożenia sił biernych:

$$\bar{\delta}_{B_j} = \bar{\delta}_O + \bar{\delta}_{\omega_o} \times \overline{OB_j} \quad (26)$$

Równanie (24) przyjmuje postać:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n (\bar{F}_i \cdot \bar{\delta}_{A_i}) + \sum_{j=1}^k (\bar{R}_j \cdot \bar{\delta}_{B_j}) = 0 \quad (27)$$

Po podstawieniu (25) i (26)  $\bar{\delta}_{A_i}$ ,  $\bar{\delta}_{B_j}$  do równania (27) otrzymujemy:

$$\delta L = \bar{\delta}_O \cdot \left( \sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{j=1}^k \bar{R}_j \right) + \bar{\delta}_{\omega_o} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n (\bar{F}_i \times \overline{OA_i}) + \sum_{j=1}^k (\bar{R}_j \times \overline{OB_j}) \right] = 0, \quad \forall \bar{\delta}_O, \bar{\delta}_{\omega_o} \quad (28)$$

Stąd

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{j=1}^k \bar{R}_j = \bar{S}_F + \bar{S}_R = \bar{0} \\ \sum_{i=1}^n (\bar{F}_i \times \overline{OA_i}) + \sum_{j=1}^k (\bar{R}_j \times \overline{OB_j}) = \bar{M}_O(\bar{F}_i) + \bar{M}_O(\bar{R}_j) = \bar{0} \end{cases} \quad (29)$$

Równania (29) nazywamy równaniami równowagi układu sił działającymi na ciało sztywne.

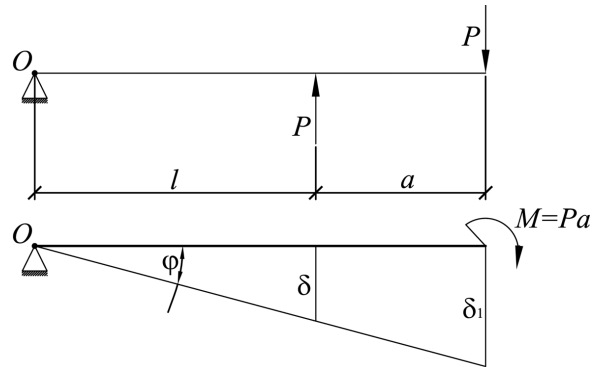
## 4. Przykłady

### 4.1. Praca wirtualna pary sił

Na rysunku 6 pokazano parę sił działającą na pręt mogący się obracać wokół punktu  $O$  oraz przesunięcia wirtualne punktów, w których przyłożone są siły.

Współrzędna momentu pary sił jest równa:

$$M = Pa$$



Rys. 6. Obciążenia i przesunięcia wirtualne

Zależność pomiędzy  $\delta_1$  i  $\delta$  otrzymujemy z proporcji:

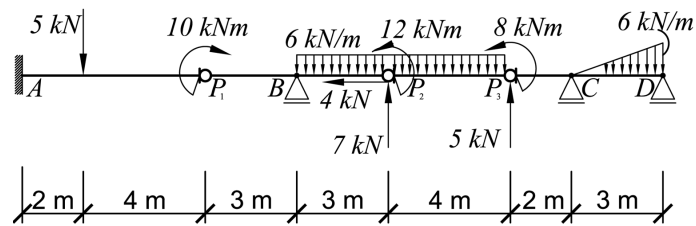
$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{l+a}{l} \Rightarrow \delta_1 = \frac{l+a}{l} \delta$$

Zatem praca wirtualna pary sił jest równa:

$$\delta L = -P\delta + P\delta_1 = \frac{Pa}{l} \delta = M \frac{\delta}{l} = M \operatorname{tg} \phi$$

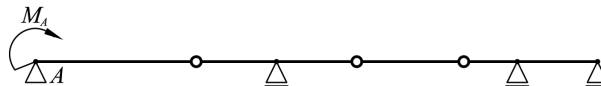
#### 4.2. Wyznaczenie momentu podporowego $M_A$ dla belki złożonej

Na rysunku 7 podano obciążenie i wymiary belki złożonej.



Rys. 7. Belka złożona

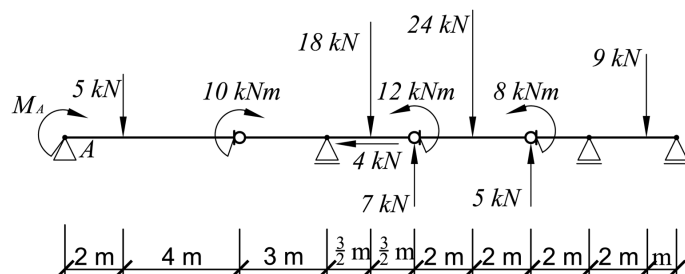
Korzystamy z hipotezy o więzach zastępując utwierdzenie  $A$  podporą przegubową (rys. 8).



Rys. 8. Podpora przegubowa z momentem  $M_A$

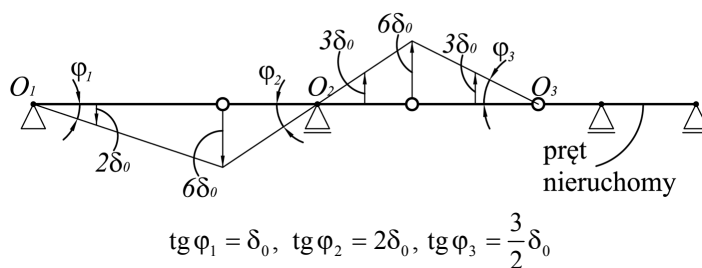


Zredukowane obciążenia belki złożonej przedstawiono na rysunku 9.



Rys. 9. Zredukowane obciążenie belki

Na rysunku 10 pokazano plan przemieszczeń wirtualnych punktów, w których są przyłożone siły (por. z rys. 9).



Rys. 10. Plan przesunięć wirtualnych

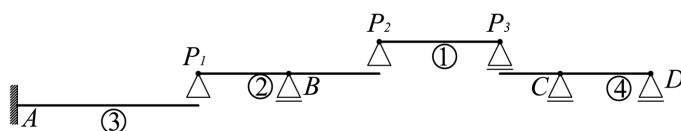
Równanie wynikające z zasady prac wirtualnych:

$$\delta L = M_A \operatorname{tg} \varphi_1 + 5 \cdot 2\delta_0 + 10 \operatorname{tg} \varphi_1 - 18 \cdot 3\delta_0 + 7 \cdot 6\delta_0 - 12 \operatorname{tg} \varphi_3 - 24 \cdot 3\delta_0 = 0 \quad \forall \delta_0$$

$$\delta L = \delta_0 (10 + 10 - 54 + 42 - 18 + 72 + M_A) = 0$$

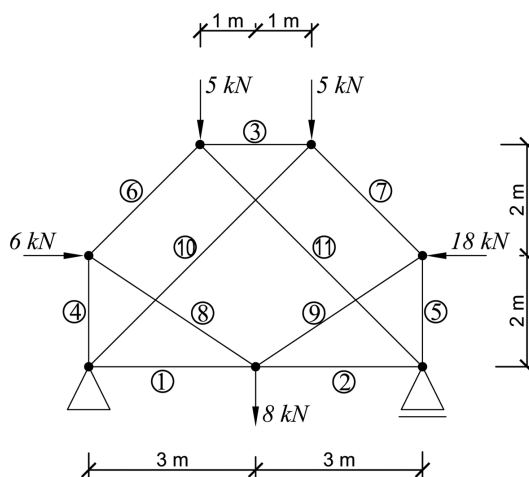
$$M_A = 82 \text{ [kNm]}$$

Bez wykorzystania zasady prac wirtualnych, aby otrzymać moment utwierdzenia na podporze  $A$  należałoby rozwiązywać belki proste od najwyższej do belki zawierającej podporę  $A$  (rys. 11).



Rys. 11. Schemat belki złożonej

4.3. Wyznaczenie siły osiowej w pręcie nr 8 kratownicy (rys. 12–14)



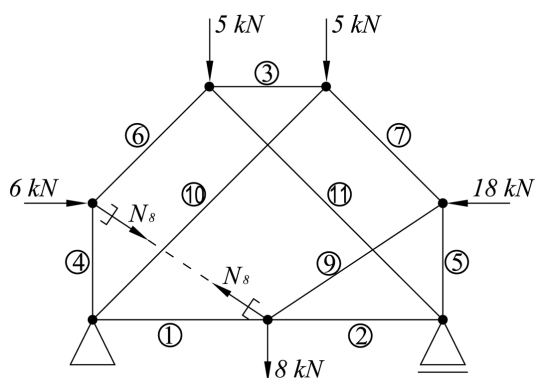
Rys. 12. Kratownica statycznie wyznaczalna

Korzystamy z hipotezy o więzach zastępując pręt nr 8 siłą osiową  $N_8$  w nim działającą.

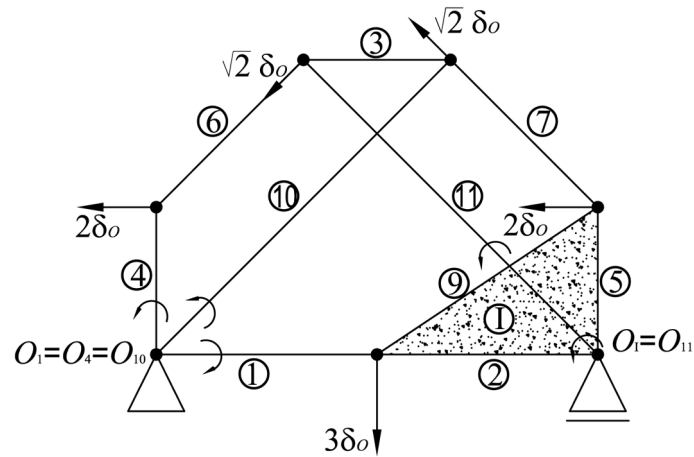
Równanie zasady prac wirtualnych

$$\delta L = -6 \cdot 2\delta_o - \left( \frac{3}{\sqrt{13}} N_8 \cdot 2\delta_o + \frac{2}{\sqrt{13}} N_8 \cdot 3\delta_o \right) + 18 \cdot 2\delta_o + 8 \cdot 3\delta_o - 5 \cdot \delta_o + 5 \cdot \delta_o = 0 \quad \forall \delta_o$$

$$\delta_o \left( -\frac{12}{\sqrt{13}} N_8 + 48 \right) = 0 \Rightarrow N_8 = 4\sqrt{13} \text{ [kN]}$$

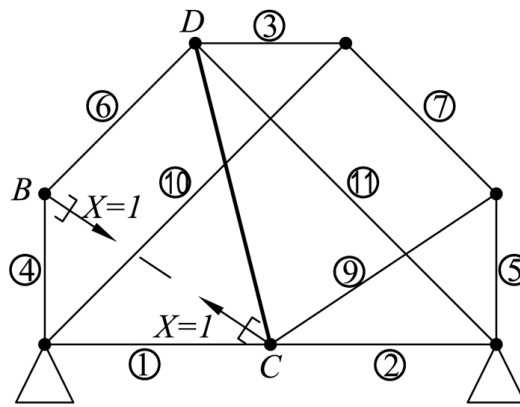


Rys. 13. Obciążenia kratownicy



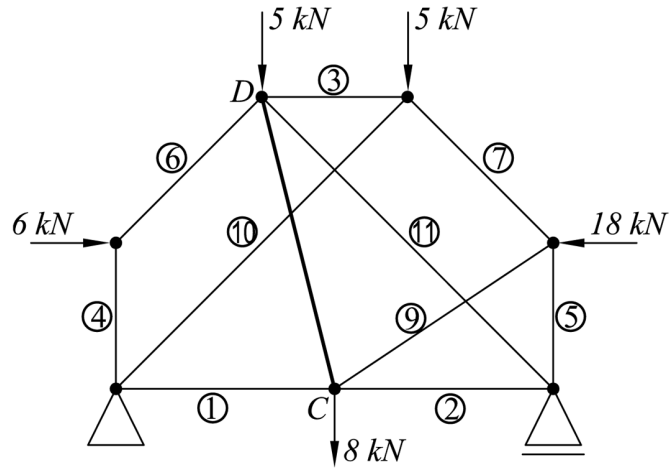
Rys. 14. Plan przemieszczeń wirtualnych punktów węzłowych kratownicy

Znając siłę  $N_8$  możemy wyznaczyć siły w pozostałych prętach wykorzystując metodę równoważenia węzłów. Warto zauważyć, że w analizowanej kratownicy (rys. 12) wyznaczenie sił osiowych w prętach sposobem równoważenia węzłów w pierwszym kroku jest niemożliwe, gdyż nie ma węzła, w którym schodziłyby się tylko dwa pręty. W wytrzymałości materiałów stosuje się w takim przypadku sposób wymiany prętów — metoda Heneberga. Usuwamy myślowo pręt łączący węzły  $B$ ,  $C$  i wstawiamy nowy pręt pomiędzy węzłami  $C$  i  $D$  (rys. 15 i 16).



Rys. 15. Kratownica z wymienionym prętem

Wyznaczamy siły osiowe we wszystkich prętach kratownicy od obciążenia  $X = 1$ . Siła w pręcie  $CD$  jest równa  $\bar{N}_{CD}^1$ .



Rys. 16. Obciążenie zewnętrzne dla kratownicy z prętem  $CD$

Wyznaczamy siły osiowe we wszystkich prętach od obciążenia zewnętrznego. Siła w pręcie  $CD$  jest równa  $N_{CD}^P$ .

W rzeczywistości pręt  $CD$  nie istnieje, zatem siła  $N_{CD}$  jest równa zero. Zachodzi więc zależność:

$$N_{CD} = X \cdot \bar{N}_{CD}^1 + N_{CD}^P = 0 \Rightarrow X = N_8 = -\frac{N_{CD}^P}{\bar{N}_{CD}^1}$$

Po przeprowadzeniu obliczeń metodą równoważenia węzłów wyznaczono:

$$\bar{N}_{CD}^1 = -\frac{\sqrt{34}}{3}, \quad N_{CD}^P = \frac{4}{3}\sqrt{442}$$

Stąd:

$$N_{CB} = X = N_8 = 4\sqrt{13}$$

Znając siłę  $N_{CB}$  wyznaczamy siły w pozostałych prętach wykorzystując zasadę superpozycji

$$N_{ij} = N_{ij}^P + N_{CB} \bar{N}_{ij}^1$$

Otrzymany wynik jest taki jak z obliczeń z wykorzystaniem zasady prac wirtualnych, ale nakład pracy jest nieporównywalny. Korzystając z zasady prac wirtualnych zyskujemy na czasie, bo obliczenia są znacznie prostsze i nie wymagają dużego nakładu pracy.

## 5. Wnioski końcowe

W zagadnieniach mechaniki górotworu istotne jest konstruowanie równań ruchu, które mogą być wyprowadzone z zasady prac wirtualnych. W realnych konstrukcjach geotechnicznych występują m.in. belki pojedyncze, złożone i kratownice. Konieczne jest wstępne wyznaczenie ich stanu równowagi. W tych zagadnieniach najefektywniejszym narzędziem jest zastosowanie zasady prac wirtualnych.

W pracy zrealizowano postawiony cel, a było nim pokazanie korzyści wynikających ze stosowania zasady prac wirtualnych.

### LITERATURA

- [1] *Beer F.P., Johnston E.R. Jr.*: Vector Mechanics for Engineers. McGraw-Hill Publishing Company, 1988
- [2] *Gutowski R.*: Mechanika analityczna. PWN, Warszawa, 1971
- [3] *Nizioł J.*: Metodyka rozwiązywania zadań z mechaniki. Wyd. 2, PWN, Warszawa, 1980
- [4] *Osiński Z.*: Mechanika ogólna, cz. 1. Warszawa, 1987
- [5] *Paluch M.*: Mechanika teoretyczna. Wyd. 8. Podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych, Politechnika Krakowska, Kraków, 2006
- [6] *Skalmierski B.*: Mechanika teoretyczna. Wyd. Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 1971
- [7] *Skalmierski B.*: Mechanika — podstawy mechaniki klasycznej. Wyd. Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 1998
- [8] *Smith Ch.E.*: Applied Mechanics Statics. Copyright 1982 by John Wiley & Sons