

Zbigniew Tajchman\*

## REGRESYJNY MODEL PROCESU KLASYFIKACJI ZIAREN SKRAJNIE DROBNYCH\*\*

---

### 1. Wstęp

Klasyfikacja przepływowa oparta jest na wykorzystaniu różnic prędkości ruchu ziaren w ośrodkach płynnych, pod wpływem wypadkowej sił masowych i sił oddziaływania ośrodka. Mimo, że w zdecydowanej większości przypadków jest to operacja przygotowawcza, nie umniejsza to jej znaczenia w całokształcie procesów przerobczych, gdyż od dokładności jej prowadzenia zależą w dużym stopniu efekty wzbogacania.

W idealnym modelu deterministycznym procesu wprowadza się cały szereg uproszczeń, co powoduje, że bardzo często niemożliwe jest określenie a priori najważniejszych charakterystyk procesu. W klasycznej teorii procesu rozpatruje się bowiem zachowanie pojedynczej cząstki kulistej, która nie oddziałuje z innymi cząstkami w trakcie procesu [1].

Wprowadzenie do wzorów stałe współczynniki i poprawki mają z reguły wartości wyznaczane doświadczalnie, które nie pozwalają jednak na jednoznaczną interpretację wszystkich zjawisk zachodzących w trakcie procesu klasyfikacji. Nie wyczerpuje to złożoności problemu, gdyż w opisie procesu należy uwzględnić oddziaływania o charakterze losowym. Losowość procesu powoduje bowiem znaczne trudności w określaniu związków pomiędzy poszczególnymi zjawiskami elementarnymi, a także w precyzyjnej identyfikacji pełnego zespołu czynników wpływających na przebieg i wyniki procesu [5].

Zakłada się też, że podstawowym czynnikiem procesu jest mechaniczne oddziaływanie cząstek stałych i ośrodka, przyjmując że podstawowe strugi są zdeterminowane, a koncentracja objętościowa fazy stałej rozkłada się równomiernie [6].

W przypadku klasyfikacji ziaren skrajnie drobnych (od jednego do kilkunastu mikrometrów) należy liczyć się z wpływem oddziaływań elektrycznych powierzchni ziaren i ich agregacji, ruchami dyfuzyjnymi cząstek, wpływem na zmiany lepkości środowiska procesu a także ich kształtem [1, 4].

---

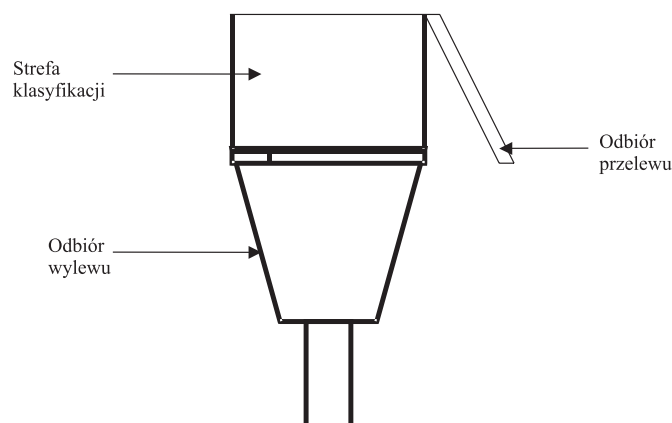
\* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

\*\* Artykuł jest oparty na badaniach przeprowadzonych w ramach pracy statutowej AGH nr 11.11..100.238

Ilościowe wyznaczenie zależności pomiędzy tymi czynnikami może okazać użyteczne przy próbach poprawy wskaźników oceny procesu i umożliwić wprowadzenie nowych elementów do modelu deterministycznego.

## 2. Część doświadczalna

Proces rozdziału materiałów modelowych prowadzono w klasyfikatorze pionowo-prądowym (elutriatorze), którego schemat przedstawiono na rysunku 1 [6].



Rys. 1. Schemat klasyfikatora pionowo-prądowego

Urządzenie to składa się z dwóch części:

- 1) cylindrycznej,
- 2) stożkowej.

W części cylindrycznej znajduje się obszar klasyfikacji cząstek, natomiast w części stożkowej następuje odbiór cząstek, które stanowią produkt wylewowy klasyfikacji. Produkt przelewowy odbierany jest poprzez rynną umieszczoną na górnym końcu obszaru klasyfikacji. Całe stanowisko badawcze umieszczono w płaszczu, który połączono z ultratermostatem, co zapewniało stabilizację i regulację temperatury. Stabilizację szybkości wypływu wody zapewniono poprzez typowy układ ciśnieniowy butli Mariotta gdzie woda destylowana, która stanowiła ośrodek klasyfikujący dostarczana była z hermetycznie zamkniętej butli, a ubytek wody z butli był na skutek wytworzonego podciśnienia uzupełniany poprzez przewód połączony z drugiej otwartej butli. Prędkość strumienia wznoszącego kontrolowana rotametrem regulowano poprzez wysokość słupa wody w butli i zestawu kapilar. Wszystkie doświadczenia klasyfikacji badanych materiałów w klasyfikatorze pionowo-prądowym

przeprowadzono w identyczny sposób. Wstępnie przez dwie godziny ustalano i stabilizowano warunki prowadzenia procesu. Wartości pH środowiska stabilizował roztwór cieczy wypływającej z butli Mariotta. Prędkość liniowa strumienia wznoszącego ustalano dla poszczególnych materiałów tak by odpowiadała ona prędkości opadania swobodnego ziarna danego materiału o wielkości  $d = 8 \cdot 10^{-6}$  m.

W trakcie prowadzenia doświadczeń na bieżąco sprawdzano prędkość ruchu wznoszącego przez wskazania rotametri.

Otrzymane produkty zagęszczano, a następnie suszono w temperaturze 105°C ważono i określano skład ziarnowy metodą zliczania ziaren o danych rozmiarach pod mikroskopem. Podczas jednej analizy zliczano ok. 1500 ziaren, przyjmując sześć klas ziarnowych:

- 0÷2  $\mu\text{m}$ ,
- 2÷4  $\mu\text{m}$ ,
- 4÷8  $\mu\text{m}$ ,
- 8÷16  $\mu\text{m}$ ,
- 16÷30  $\mu\text{m}$ ,
- 30÷40  $\mu\text{m}$ .

### 3. Aproksymacja krzywej rozdziału

Liczne dane doświadczalne dotyczące rozmaicie przeprowadzonych procesów klasyfikacji pozwalają stwierdzić, że istnieje szereg funkcji przybliżających przebieg krzywej rozdziału.

W pierwszym rzędzie przeprowadzono aproksymację otrzymanych rzeczywistych krzywych rozdziału równaniem dystrybuanty rozkładu logarytmiczno-normalnego i pierwiastkowo-normalnego. Otrzymane równania przybliżały dobrze rzeczywistą krzywą rozdziału w bliskim sąsiedztwie wielkości ziarna podziałowego  $d_{50}$ , natomiast wyliczone wartości ziaren charakterystycznych znacznie odbiegały od wyznaczonych z rzeczywistej krzywej rozdziału. Ostatecznie przyjęto proponowaną dla procesu klasyfikacji w hydrocyklonach aproksymację wielomianem  $n$ -tego stopnia. Przy pomocy przygotowanego programu wyliczano na podstawie wyznaczonych składowych ziarnowych i wchodów produktów, funkcje wielomianów od pierwszego do czwartego stopnia, aproksymujące rzeczywiste krzywe rozdziału [2, 4, 6].

W tabelach 1–8 przedstawiono przykładowo zestaw wyników obliczeń dla jednej serii doświadczeń klasyfikacji szkła kwarcowego.

Kolejno przedstawiono:

- składy ziarnowe i wychody przelewu i wylewu,
- wartości współczynników regresji wielomianów  $n$ -tego stopnia aproksymujących rzeczywistą krzywą rozdziału dla danego doświadczenia ( $n = 1, 2, 3, 4$ ),

- analizę wariancji dla wielomianu 1 stopnia,
- analizę wariancji dla wielomianu 2 stopnia,
- analizę wariancji dla wielomianu 3 stopnia,
- analizę wariancji dla wielomianu 4 stopnia,
- tablicę reszt regresji wielomianowej 4 stopnia,
- wyliczone wartości przejętych wskaźników oceny rozdziału.

Po wyznaczeniu wskaźników równania ( $a_0, \dots, a_4$ ), podstawiano odpowiednie wartości  $T(d)$  i obliczano charakterystyczne ziarna (np. dla  $T(d) = 0,75$  otrzymano wielkość ziarna  $d_{75}$  itd.). Wartość wskaźnika oceny ostrości rozdziału  $A = \tan \alpha$  obliczono, wyznaczając pierwszą pochodną funkcji w punkcie  $d_{50}$ , natomiast pozostałe wskaźniki ostrości rozdziału podstawiając odpowiednie wartości ziaren charakterystycznych.

TABELA 1  
Analiza składu ziarnowego produktów rozdziału

Klasa ziarnowa, $\mu\text{m}$	Średnie ziarno $\mu\text{m}$	Wylew		Przelew	
		%	g	%	g
0÷2	1	0,520	0,037	54,020	0,823
2÷4	3	0,780	0,056	25,040	0,381
4÷8	6	1,500	0,107	20,940	0,319
8÷15	11,5	12,020	0,858	0,000	0,000
15÷30	22,5	72,120	5,136	0,000	0,000
30÷40	35	13,060	0,932	0,000	0,000
		100,00	7,136	100,00	1,523
Wychody produktów		82,413%		17,587%	
Regresja wielomianowa $T(d) = a_0 + a_1d + a_2d^2 + a_3d^3 + a_4d^4$					
Stopień	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
1	0,2481	0,0217			
2	-0,650	0,0838	-0,135		
3	-0,1888	0,1332	-0,0458	-0,0005	
4	0,1411	-0,1057	0,0303	-0,0015	0,0002

TABELA 2

**Analiza wariancji**

Źródło zmienności	Stopnie swobody	Suma kwadratów	Średni kwadrat	Wartość testu F	Poprawka sumy kwadratów
Analiza wariancji dla wielomianu 1 stopnia					
W regresji	1	0,65541	0,04765	5,52696	0,00364
Poza regresją	4	0,47433	0,11859		
Ogółem	5	1,12974			
Analiza wariancji dla wielomianu 2 stopnia					
W regresji	2	1,01008	0,50504	12,66196	0,35467
Poza regresją	3	0,11966	0,03989		
Ogółem	5	1,12974			
Analiza wariancji dla wielomianu 3 stopnia					
W regresji	3	1,03753	0,34584	7,50126	0,02745
Poza regresją	2	0,09221	0,04610		
Ogółem	5	1,12974			
Analiza wariancji dla wielomianu 4 stopnia					
W regresji	4	1,12211	0,28053	36,77672	0,08458
Poza regresją	1	0,00763	0,00763		
Ogółem	5	1,12974			

TABELA 3

**Tabela reszt regresji wielomianowej 4 stopnia**

Numer obserwacji	Wartość $d_{sr}$	Wartość rzeczywista $T(d)$	Wartość estymowana $T(d)$	Reszta
1	1,00000	0,04316	0,07016	-0,02700
2	3,00000	0,12737	0,06316	0,06422
3	6,00000	0,25131	0,30183	0,05052
4	11,50000	1,00000	0,98513	0,01483
5	22,50000	1,00000	1,00157	-0,00157
6	35,00000	1,00000	0,99995	0,00005

TABELA 4

**Wskaźniki oceny procesu rozdziału**

$D_{50}$	$D_{25}$	$d_{75}$	$d_{35}$	$d_{65}$
7,63863	5,51885	9,56727	6,42086	8,79581
$Ep$	$J$	$A$	$B$	$W_E$
2,02421	0,26500	12,7750	0,72999	12,3510

Ostatecznie przyjęto aproksymację krzywej rozdziału wielomianem 4 stopnia:

$$T(d) = a_0 + a_1d + a_2d^2 + a_3d^3 + a_4d^4 \quad (1)$$

**4. Analiza regresji**

Jedną z możliwości budowy modelu matematycznego procesu klasyfikacji przepływowej jest określenie wpływu zmiennych parametrów na wyniki rozdziału metodą analizy regresji [2, 4, 6].

Wielkości, które uwzględniono przy budowie modelu tą metodą, podzielono na trzy grupy:

- 1) Wielkości sterujące, umożliwiające celowe oddziaływanie na przebieg procesu przedstawione wektorem:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (2)$$

- $x_1$  — temperatura środowiska procesu,
- $x_2$  — wartość  $pH$  środowiska,
- $x_3$  — koncentracja objętościowa fazy stałej w zawieszynie,
- $x_4$  — lepkość zawiesziny;

- 2) Wielkości zakłócające, podlegające tylko częściowo bezpośrednim pomiarom, przedstawione wektorem:

$$V = (v_1, \dots, v_n) \quad (3)$$

Stanowią je:

- skład ziarnowy nadawy,
- kształt ziaren,
- powierzchnia właściwa ziaren,
- lokalne zakłócenia pola prędkości strumienia wznoszącego,

- niejednorodność koncentracji,
- wzajemne uderzanie cząstek o siebie,
- obrotowy ruch cząstek,
- dyfuzyjne ruchy Browna cząstek najdrobniejszych,
- agregacja ziaren,
- wpływ sąsiedztwa ścian urządzenia.

3) Wielkości wyjściowe charakteryzujące stan procesu przedstawione wektorem:

$$Y = (y_1, \dots, y_n) \quad (4)$$

Są to wskaźniki oceny rozdziału, z których do budowy modelu wybrano dwa:

- $y_1$  — ziarno podziałowe  $d_{50}$ ,
- $y_2$  — tangens kąta nachylenia krzywej rozdziału aproksymowanej wielomianem czwartego stopnia.

Przebieg procesu można opisać przy pomocy równania:

$$Y = f(X, V) \quad (5)$$

Przyjmując, że możliwe jest ściśle określenie wielkości wejściowych  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , oraz wielkości wyjściowych  $y$ , można zestawić macierze danych przy pomocy, których możliwe jest wyznaczenie charakterystyki procesu w postaci wybranej arbitralnie:

$$Y = f(x_1, \dots, x_n, a_0, a_1, \dots, a_k) + \zeta \quad (6)$$

zawierającej  $k + 1$  nieznanymi współczynnikami  $a$  i zmienną resztową  $\zeta$  (składnik losowy modelu).

Aby wyznaczyć optymalne współczynniki  $a$ , stosuje się metodę najmniejszej sumy kwadratów odchyleń, która stanowi podstawę analizy regresji.

W pierwszym etapie przyjęto liniową postać równania:

$$Y = a_0 + \sum a_i x_i \quad (7)$$

Jako następne przybliżenie przyjęto równanie w postaci:

$$Y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum b_i x_i^2 + \sum c_i x_i x_j \quad (8)$$

W tabeli 5 przedstawiono liniowe równanie regresji, gdzie zmienną wyjściową  $y_1$  jest ziarno podziałowe  $d_{50}$ , natomiast w tabeli 6  $y^2$  jest wskaźnikiem ostrości rozdziału  $A = \text{tga}$ .

W tabelach 7 i 8 przedstawiono równania regresji wielokrotnej dla tego samego układu zmiennych wyjściowych.

TABELA 5

Równanie regresji liniowej  $d_{50} = f(t, \text{pH}, \eta, \theta,)$ 

	Wartość współczynnika	Błąd standardowy	Przedział ufności	Wartość testu t	Współczynnik korelacji cząstkowej
$a_0$				0,89	0,13
$a_1$				0,34	0,05
$a_2$	0,4575	0,335	0,0672	13,56	0,90
$a_3$	-5,4178	1,1675	2,3456	4,54	-0,57
$a_4$	3,1391	0,3329	0,6689	9,43	0,81

TABELA 6

Równanie regresji liniowej  $A = f(t, \text{pH}, \eta, \theta,)$ 

	Wartość współczynnika	Błąd standardowy	Przedział ufności	Wartość testu t	Współczynnik korelacji cząstkowej
$a_0$	8,0837	0,4018	0,8073	20,12	0,95
$a_1$				0,01	0,00
$a_2$	0,1748	0,0524	0,1053	3,34	0,44
$a_3$				1,29	0,19
$a_4$				0,50	0,07

TABELA 7

Równanie regresji wielokrotnej  $d_{50} = f(t, \text{pH}, \eta, \theta,)$ 

	Wartość współczynnika	Błąd standardowy	Przedział ufności	Wartość testu t	Współczynnik korelacji cząstkowej
$a_1$	-0,0466	0,0069	0,0140	6,73	-0,72
$a_2$	1,1711	0,0783	0,1582	14,96	0,92
$a_3$	-6,8199	0,8615	1,7412	7,92	-0,78
$b_2$	-0,0712	0,0037	0,0076	19,03	-0,95
$c_{23}$	-0,2608	0,1129	0,2281	2,31	0,34
$c_{24}$	0,1294	0,0444	0,0896	2,92	0,41
$a_0$	3,2974	0,3969	0,8023	8,31	0,79



TABELA 8

Równanie regresji wielokrotnej  $A = f(t, \text{pH}, \eta, \theta)$ 

	Wartość współczynnika	Błąd standardowy	Przedział ufności	Wartość testu t	Współczynnik korelacji cząstkowej
$a_2$	0,5019	0,1968	0,3977	2,55	0,36
$a_4$	4,8952	0,4093	0,8273	11,96	0,87
$b_2$	-0,0528	0,0179	0,0238	4,48	-0,56
$c_{12}$	0,0145	0,0018	0,0036	8,01	0,77

W pierwszej fazie opracowania wyników obliczeń dokonano analizy macierzy współczynników korelacji pomiędzy poszczególnymi parami zmiennych.

Ziarno podziałowe  $d_{50}$  jest skorelowane na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  z temperaturą prowadzenia procesu, koncentracją objętościową, pH i lepkością zawiesiny, natomiast wskaźnik ostrości rozdziału A jest skorelowany z wartościami pH i koncentracją objętościową zawiesiny. Jedną skorelowaną parą zmiennych niezależnych stanowi temperatura i lepkość zawiesiny gdzie współczynnik jest bardzo wysoki i wynosi  $r = -0,910$ , natomiast drugą lepkość  $\eta$  i pH środowiska gdzie  $r = -0,244$ . Wartość krytyczna  $r = 0,185$  na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$ .

Otrzymane równania regresji liniowej mają następującą postać:

$$d_{50} = 0,457 \text{ pH} - 5,418 \theta + 3,139 \eta \quad (9)$$

$$A = 8,083 + 0,174 \text{ pH} \quad (10)$$

Współczynniki korelacji wielokrotnej dla obu równań są bardzo wysokie i wynoszą odpowiednio: 0,987 i 0,992.

## 5. Wnioski

Analiza otrzymanych równań liniowych prowadzi do następujących wniosków.

- Ziarno podziałowe  $d_{50}$  jest dodatnio determinowane przez wartości pH środowiska i lepkość zawiesiny, natomiast ujemnie przez wartości koncentracji objętościowej.
- Ponieważ wartości zmiennych parametrów podawane są w wartościach bezwzględnych występują dość znaczne różnice w wartościach współczynników równań.
- W przypadku jednak, gdy zamiast wartości bezwzględnych wzięto pod uwagę standaryzowane zmiany poszczególnych parametrów w przyjętym zakresie badań, wartości współczynników występują na tym samym poziomie.

- Wszystkie otrzymane zależności regresyjne pomiędzy zmiennymi parametrami a wskaźnikami oceny procesu rozdziału charakteryzują się wysokimi współczynnikami korelacji, co wskazuje na dobre dopasowanie wyestymowanych funkcji do danych doświadczalnych.
- Brak w równaniu regresji liniowej wpływu temperatury na wartości wskaźnika oceny procesu ziarna podziałowego  $d_{50}$  można wytłumaczyć dużym wpływem lepkości środowiska procesu, którym maskuje wpływ temperatury a z którym jest ściśle skorelowany.
- W równaniu regresji liniowej na wskaźnik ostrości rozdziału wpływa przede wszystkim pH środowiska, natomiast wpływ innych parametrów na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  można odrzucić.
- Równania regresji wielokrotnej potwierdziły zależność wyników procesu od funkcji kwadratowej wartości pH środowiska, lecz tylko w niewielkim stopniu poprawiają dopasowanie modelu, a wprowadzenie kolejnych członów równania nie zmienia ogólnego charakteru zależności

#### LITERATURA

- [1] *Bednarski St.*: Podział i klasyfikacja zawiesin oraz obliczenie ich efektywnej (pozornej) lepkości. Rudy i metale nieżelazne 11, 1973
- [2] *Fisz M.*: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1967
- [3] *Sztaba K.*: Metoda statystyczna badania procesu klasyfikacji mokrej. Archiwum Górnictwa, z. 1, 1956
- [4] *Tajchman Z.*: Wpływ zmian pH środowiska na agregację ziaren drobnych w procesie klasyfikacji. Zeszyty Naukowe politechniki Śląskiej, Seria Górnictwo, z. 284, 2008
- [5] *Tajchman Z.*: Wpływ wybranych parametrów fizyko-chemicznych na proces klasyfikacji ziaren bardzo drobnych. Praca doktorska, Kraków 1986
- [6] Poradnik fizyko-chemiczny. WNT, Warszawa, 1974