

*Paweł Fedczuk**

ANALIZA MES–MKEB NIELINIOWEGO PROBLEMU WSPÓŁDZIAŁANIA ŁAWY FUNDAMENTOWEJ Z PODŁOŻEM GRUNTOWYM

1. Wprowadzenie

Zwykle w obliczeniach numerycznych wykorzystuje się pojedyncze klasyczne metody obliczeniowe, takie jak metoda elementów skończonych [1] i elementów brzegowych [2]. Rzadko spotyka się zastosowania kombinacji obu tych metod, lepiej wykorzystujące ich zalety.

W niniejszym opracowaniu prezentuje się koncepcję zastosowania kombinacji metod elementów skończonych (MES) i kontaktowych elementów brzegowych (MKEB) do analizy trójwymiarowego problemu współdziałania układu „ława fundamentowa-podłoże gruntowe”, z uwzględnieniem sprężysto-plastycznych własności gruntu w podłożu. Ławę fundamentową modeluje się zgodnie z zasadami pierwszej metody [1], natomiast podłoże gruntowe w sposób właściwy dla drugiej. MKEB stanowi odmianę klasycznej wersji metody elementów brzegowych [2], w której fundamentalne rozwiązanie Kelvina dla przestrzeni sprężystej zastąpione jest kombinacją rozwiązań problemów Boussinesqa i Ceruttiego dla izotropowej i jednorodnej półprzestrzeni sprężystej. Zastosowanie prezentowanej kombinacji ogranicza się do fundamentów spoczywających na jednorodnym geologicznie podłożu gruntowym.

Zakres niniejszego opracowania obejmuje podstawy teoretyczne tej kombinowanej metody rozwiązania, uwzględniając sformułowanie i wyprowadzenie podstawowych zależności oraz prezentację sposobu ich rozwiązania, wykorzystującego technikę przyrostowo-iteracyjną, opartą na metodzie Raphsona-Newtona [5, 6]. Zachowanie ławy modeluje prawo Hooke’a, natomiast gruntu w podłożu — sprężysto-plastyczny model Modified Cam-Clay [7]. Postawy teoretyczne uzupełnia przykład obliczeniowy, ilustrujący zastosowanie tej metody analizy.

* Katedra Geotechniki i Geodezji, Wydział Budownictwa, Politechnika Opolska, Opole

2. Założenia upraszczające

Ława jest fundamentem bezpośrednim, posadowionym w jednorodnym geologicznie podłożu gruntowym, modelowanym przez jednorodną półprzestrzeń. Dyskretyzuje się ją zgodnie z zasadami MES [1], zastępując układem prętowych elementów skończonych, natomiast podłoże — stosownie do zasad MKEB [4, 5], wycinając z półprzestrzeni prostopadłością o wymiarach dostosowanych do rozmiarów ławy. Powierzchnię brzegową wyciętej bryły w obszarze kontaktu z fundamentem — dzieli się na regularny układ prostokątnych elementów kontaktowych o środkach pokrywających się z węzłami elementów MES, tworzących strukturę ławy. Wnętrze prostopadłości modeluje struktura prostopadłościennych komórek (cel o jednym węźle umieszczonym w środku), skoordynowana z siatką elementów brzegowych. Obciążenie ławy stanowi zestaw przyrostów, symulujących proces jego narastania.

3. Przyrostowe sformułowanie problemu

Każdy ze składników układu „ława fundamentowa-podłoże gruntowe” rozpatrywany jest oddzielnie, stosownie do przyjętej metody analizy. Ława analizowana jest w sposób właściwy dla MES, natomiast podłoże — zgodnie z zasadami MKEB. Złożenie otrzymanych oddzielnie równań równowagi daje kompleksową zależność dla całego układu. Przedstawione sformułowanie ujęte jest w formie przyrostowej.

Zastosowanie MES [1] do analizy ławy fundamentowej daje wyjściową postać równania prac przygotowanych. Użycie MKEB [4, 5] do analizy podłoża z uwzględnieniem podziału przyrostu deformacji na części sprężystą i plastyczną oraz oddzielnym ich zdefiniowaniem, daje kompletne równanie, określające przyrost uogólnionego przemieszczenia $d\mathbf{u}(\xi)$ w punkcie ξ brzegu półprzestrzeni (wywołanego przyrostem obciążenia $d\mathbf{q}(\mathbf{x})$ w punkcie \mathbf{x} płaszczyzny granicznej). Uzupełnia je uogólniona zależność transformacyjna [3, 4]. Tworzą one razem zestaw trzech zależności:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T d\mathbf{P} + \int_{(S)} \delta \mathbf{u}_B^T d\mathbf{p} dS &= \int_{(V)} \{ \mathbf{L}_B [\delta \mathbf{u}_B(\mathbf{x})] \}^T \mathbf{D}_B^e \mathbf{L}_B d\mathbf{u}_B dV \\ d\mathbf{u}(\xi) &= d\mathbf{u}^e(\xi) + d\mathbf{u}^p(\xi) = \int_{(A)} [\mathbf{G}(\mathbf{x}, \xi)]^T d\mathbf{q}(\mathbf{x}) dA + \int_{(V)} [\mathbf{C}(\mathbf{z}, \xi)]^T d\boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{z}) dV \\ d\mathbf{u}_B(\mathbf{x}) &= \mathbf{T} d\mathbf{u}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1)$$

w których: $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{u}_B$ oznaczają uogólnione wirtualne przemieszczenia węzłowe i „powierzchniowe”, $d\mathbf{P}$, $d\mathbf{p}$ — przyrosty uogólnionego obciążenia skupionego i powierzchniowego, $d\mathbf{u}_B$, $d\boldsymbol{\sigma}_B^p$ — przyrosty składników układu: węzłowego przemieszczenia i plastycznej części naprężenia. \mathbf{L}_B i \mathbf{D}_B^e to odpowiednio operator macierzowy pochodnych i macierz konstytutywna sprężystości. Składowymi macierzy Greena $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \xi)$ są rozwiązania zagadnień Boussinesqa i Ceruttiego. Macierz przemieszczeń $\mathbf{C}(\mathbf{z}, \xi)$ definiuje operacja $\mathbf{L}\mathbf{G}(\mathbf{z}, \xi)$ (gdzie \mathbf{L} to macierzowy operator pochodnych), $d\boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{x})$ oznacza plastyczny przyrost naprężenia, a \mathbf{T} — macierz transformacji.

4. Równanie równowagi układu

Zastosowanie do zdyskretyzowanej struktury łąwy standardowych formuł MES na uogólnione przemieszczenie $\mathbf{u}_B(\mathbf{x})$ i macierz odkształceń $\mathbf{B}_B(\mathbf{x})$, oraz zastąpienie obciążenia ciągłego $d\mathbf{p}$ ekwiwalentnym obciążeniem skupionym $d\mathbf{Q}$ sprowadza wyrażenie (1.a) do końcowego równania równowagi MES dla tej substruktury:

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{P}} &= \mathbf{K}_B d\mathbf{u}_B \\ d\bar{\mathbf{P}} &= d\mathbf{P} + d\mathbf{Q} = d\mathbf{P} + \int_{(S)} d\mathbf{p} dS \\ \mathbf{K}_B &= \int_{(V)} \mathbf{B}_B^T \mathbf{D}_B^e \mathbf{B}_B dV \end{aligned} \quad (2)$$

W przypadku podłoża rozwiązanie wymaga oddzielnego potraktowania części sprężystej i plastycznej końcowego równania (1.b). Wyrażenie przyrostu obciążenia $d\mathbf{q}(\mathbf{x})$ w dowolnym elemencie kontaktowym (k) typową dla MES formułą interpolacyjną dla j węzłów elementu (k), przekształca równanie Somigliany (pierwszy fragment relacji (1.b)) w zależność określającą liniowo-sprężystą część przyrostu przemieszczenia w węzle elementu kontaktowego (i):

$$d\mathbf{u}_i^e = \sum_{(k)} \int_{(A_k)} [\mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})]^T \sum_{(j)} [\bar{N}_j(\mathbf{x}) \mathbf{I} d\mathbf{q}_j^k] dA_k = \sum_{(j)} \mathbf{A}_{ij} d\mathbf{q}_j \quad (3)$$

gdzie \mathbf{A}_{ij} — elementarna macierz podatności podłoża.

Plastyczną część przemieszczenia w węzle elementu kontaktowego (i) określa druga część zależności (1.b), w której położenie komórki (h) ustalają współrzędne \mathbf{z} :

$$d\mathbf{u}_i^p = \sum_{(h)} \int_{(V_h)} [\mathbf{C}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})]^T d\boldsymbol{\sigma}^{lp}(\mathbf{z}) dV_h \quad (4)$$

Pełny przyrost przemieszczenia w węzle i określa równanie złożone z zależności (3) i (4), które po uogólnieniu na wszystkie węzły struktury podłoża daje związek:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{A}d\mathbf{q} + d\mathbf{u}^p = \mathbf{A}d\mathbf{q} + d\boldsymbol{\Psi} \quad (5)$$

Wstawia się go po przekształceniu do zależności na przyrost sił węzłowych $d\mathbf{F}_g$, otrzymanej z zasady prac przygotowanych, uzyskując relację:

$$d\mathbf{F}_g = \boldsymbol{\Lambda}d\mathbf{q} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{A}^{-1}(d\mathbf{u} - d\boldsymbol{\Psi}) \quad (6)$$

Końcowe równanie równowagi dla podłoża definiuje zależność:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F}_g &= \mathbf{K}_g d\mathbf{u} - d\mathbf{F}^p \\
\mathbf{K}_g &= \bar{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}^{-1} \\
d\mathbf{F}^p &= \mathbf{K}_g d\mathbf{\Psi}
\end{aligned} \tag{7}$$

w której \mathbf{K}_g to macierz sztywności podłoża, $d\mathbf{F}^p$ — plastyczna część przyrostu sił węzłowych, a $\mathbf{\Lambda}$ — macierz powierzchni brzegowych elementów kontaktowych.

Integracja całego układu „ława fundamentowa–podłoże gruntowe” wymaga złożenia równań (2) i (7) z uwzględnieniem zależności transformacyjnej (1.c). Przyrost sił w węzłach rozważanego układu $d\mathbf{R}$ równoważy suma reakcji:

$$d\mathbf{R} = d\bar{\mathbf{P}} + \mathbf{T}d\mathbf{F}_g = \mathbf{K}_B d\mathbf{u}_B + \mathbf{T}(\mathbf{K}_G d\mathbf{u} - d\mathbf{F}^p) = \mathbf{K}_g d\mathbf{u}_B + [\mathbf{K}_g(\mathbf{T}^T d\mathbf{u}_B) - d\mathbf{F}^p] \tag{8}$$

Po elementarnych przekształceniach otrzymuje się końcowe równanie równowagi dla całego układu:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} d\mathbf{u}_B &= d\mathbf{R} + d\bar{\mathbf{F}}^p \\
\mathbf{K} &= \mathbf{K}_B + \mathbf{T} \mathbf{K}_g \mathbf{T}^T \\
d\bar{\mathbf{F}}^p &= \mathbf{T} d\mathbf{F}^p
\end{aligned} \tag{9}$$

w którym \mathbf{K} oznacza globalną macierz sztywności układu, natomiast $d\bar{\mathbf{F}}^p$ — sprowadzony przyrost sił węzłowych.

5. Procedura przyrostowo-iteracyjna

Do rozwiązania różniczkowego równania równowagi (9) dla analizowanego zagadnienia współdziałania układu „ława fundamentowa–podłoże gruntowe”, stosuje się technikę numeryczną, opartą na metodzie Newtona-Raphsona. Algorytm operacyjny tej przyrostowo-iteracyjnej procedury (wykorzystującej stałą styczną macierz sztywności układu \mathbf{K}) obejmuje:

- 1) podział obciążenia \mathbf{R} na szereg przyrostów $d\mathbf{R}_{i=1}^{(l)}$ (i przyjęcie kroku przyrostowego $l = 1$),
- 2) utworzenie (w iteracji $i = 1$ kroku l) macierzy sztywności substruktury ławy fundamentowej \mathbf{K}_B , podłoża \mathbf{K}_g i całego układu \mathbf{K} ,
- 3) obliczenie przyrostów przemieszczeń i sił węzłowych, oraz aktualizację przemieszczeń i sił węzłowych:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{u}_B^i &= \mathbf{K}^{-1} d\mathbf{R}_{i=1}^{(l)} & d\mathbf{u}^i &= \mathbf{T}^{-1} d\mathbf{u}_B^i & d\mathbf{F}_g &= \mathbf{K}_g d\mathbf{u}^i \\
\mathbf{u}_B^{(l)} &= \mathbf{u}_B^{(l-1)} + d\mathbf{u}_B^i & \mathbf{u}^{(l)} &= \mathbf{u}^{(l-1)} + d\mathbf{u}^i & \mathbf{F}_g^{(l)} &= \mathbf{F}_g^{(l-1)} + d\mathbf{F}_g
\end{aligned} \tag{10}$$

- 4) wyznaczenie (w iteracji $i = i + 1$) przyrostu naprężeń $d\boldsymbol{\sigma}'$ w środkach komórek podłoża (wywołanego obciążeniem elementów kontaktowych $d\mathbf{F}_g$) i odpowiadającego im przyrostu odkształceń $d\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{D}^*)^{-1} d\boldsymbol{\sigma}' \tag{11}$$

- 5) obliczenie (w środkach komórek podłoża) części plastycznej przyrostu naprężeń $d\sigma^{lp}$ i odkształceń $d\epsilon^p$ dla sprężysto-plastycznego modelu gruntu,
 6) określenie korekty przemieszczeń w środkach elementów kontaktowych $d\Psi$ i sprowadzonej plastycznej części przyrostu sił węzłowych $d\bar{F}^p$:

$$\begin{aligned} d\Psi &= \hat{C}d\sigma^{lp} = \left(\int_V C^T dV \right) d\sigma^{lp} \\ d\bar{F}^p &= T(K_g d\Psi) \end{aligned} \quad (12)$$

- 7) wyznaczenie wektora obciążeń residualnych dla całego układu $dR_i^{(l)}$ z zależności:

$$dR_i^{(l)} = d\bar{F}^p \quad (13)$$

- 8) obliczenie przyrostów przemieszczeń i sił węzłowych oraz aktualizację przemieszczeń i obciążenia według relacji:

$$\begin{aligned} du_b^i &= K^{-1}dR_i^{(l)}, \quad du^i = T^{-1}du_b^i, \quad dF_g = K_g du^i \\ u_B^{(l)} &= u_B^{(l-1)} + du_b^i, \quad u^{(l)} = u^{(l-1)} + du^i, \quad F_g^{(l)} = F_g^{(l-1)} - dF^p + K_g du^i \end{aligned} \quad (14)$$

- 9) sprawdzenie warunku zbieżności obliczeń:

$$[du_b^i]^T du_b^i = \tau [du_b^1]^T du_b^1 \quad (15)$$

gdzie:

- du_b^1, du_b^i — przyrosty przemieszczeń wywołane odpowiednio rzeczywistym i kolejnym residualnym przyrostem obciążenia fundamentu,
- τ — stała rzędu $10^{-2} - 10^{-6}$.

wymagającego w przypadku:

- niespełnienia — realizacji obliczeń od punktu (4) dla następnej iteracji,
- spełnienia — kontynuacji obliczeń od punktu (2) (w kroku $l = l + 1$) dla następnego przyrostu obciążenia $dR_i^{(l)}$ (lub ich zakończenia), poprzedzoną aktualizacją parametrów modeli.

Części plastyczne przyrostów naprężeń i odkształceń dla sprężysto-plastycznego modelu gruntu ustala się w kroku (5) za pomocą procedury Nayaka-Zienkiewicza [6].

Numeryczną implementację podanego algorytmu stanowi autorski program S2BF napisany w języku Fortran. Uzupełnia go para dodatkowych programów: S2BFa — edytor danych i wyników oraz S2BFb — wyznaczający w środkach komórek początkowe wartości wektora naprężeń pierwotnych, parametrów modelu gruntu, globalnej macierzy całki z macierzy przemieszczeń \hat{C} (dla jednostkowych obciążeń elementów brzegowych) i składowych funkcji zaniku naprężeń (dla jednostkowych nacisków pionowego i poziomego na kontaktowe elementy).

6. Modele konstytutywne mediów

Zachowanie ławy fundamentowej modelowanej przez belkowy ustrój prętowy opisuje liniowo sprężyste prawo Hooke'a, specyfikowane przez parę stałych materiałowych: moduł odkształcenia materiału E_B i współczynnik Poissona ν_B .

Zachowanie gruntu w środku dowolnej komórki podłoża opisuje sprężysto-plastyczny model Modified Cam-Clay [7] o powierzchni plastyczności i prawie wzmocnienia (wiązącym aktualne wartości ciśnienia prekonsolidacji p_c i wskaźnika porowatości e zdefiniowanych równaniami:

$$\begin{aligned} F(q, p) &= q^2 + M^2 p(p - p_c) \\ p_c &= p_{c0} \exp \left[\frac{e_0 - e - \kappa \ln(v/v_{p_{c0}})}{\lambda - \kappa} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie:

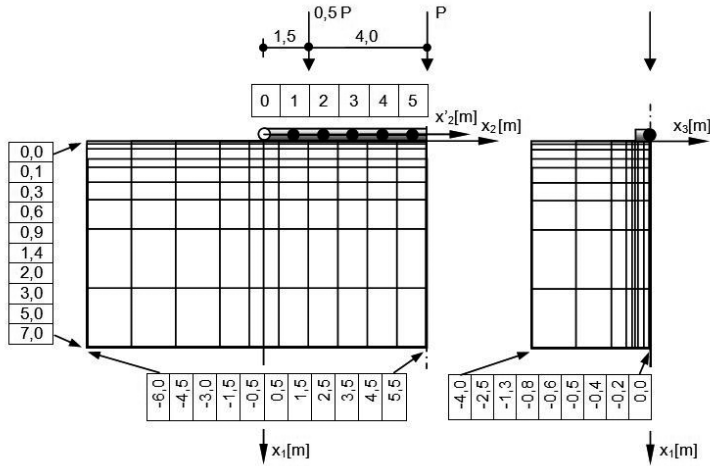
- M — nachylenie linii stanu krytycznego,
- q, p — naprężenie ścinające i średnie,
- p_c — ciśnienie prekonsolidacji,
- λ, κ — stałe modelu,
- e_0, p_{c0} — początkowe wartości wskaźnika porowatości i ciśnienia prekonsolidacji.

Wnętrze powierzchni plastyczności modeluje liniowo-sprężyste zachowanie gruntu, specyfikowane przez moduł odkształcenia E i współczynnik Poissona ν dla gruntu podłoża.

7. Przykład obliczeniowy

Do ilustracji zastosowania opisanej koncepcji analizy MES-MKEB trójwymiarowego problemu współdziałania układu „ława fundamentowa–podłoże gruntowe” wybrany został przykład ławy fundamentowej (rys. 1, prezentujący połowę symetrycznego układu) o długości 10 m i prostokątnym przekroju poprzecznym $0,4 \times 1,0$ m, posadowionej na głębokości 1,0 m poniżej poziomu terenu w jednorodnym podłożu z piasku. Obciąża ją układ 3 pionowych sił skupionych rozmieszczonych symetrycznie. Modeluje ją ustrój prętowy zbudowany z 10 jednakowych elementów prętowych o długości $L = 1,0$ m i charakterystyce geometrycznej: polu przekroju $F_B = 0,5$ m², momencie bezwładności $J_B = 0,5 \cdot 10^{-4}$ m⁴.

Podłoże modeluje prostopadłościenna bryła złożona z 2880 komórek rozmieszczonych symetrycznie. Obszar kontaktu podłoża z ławą podzielony jest na 11 brzegowych elementów kontaktowych o wymiarach $1,0 \times 1,0$ m. Zachowanie betonowej ławy opisuje prawo Hooke'a, natomiast piasku — sprężysto-plastyczny model Modified Cam-Clay [7]. Parametry obu modeli wyspecyfikowane są w tabeli 1. Obciążenie podzielone zostało na 9 jednakowych przyrostów, narastających stosownie do schematu krokiem co $0,1P$ (w stosunku do bazowej wartości $P = 100$ kN).

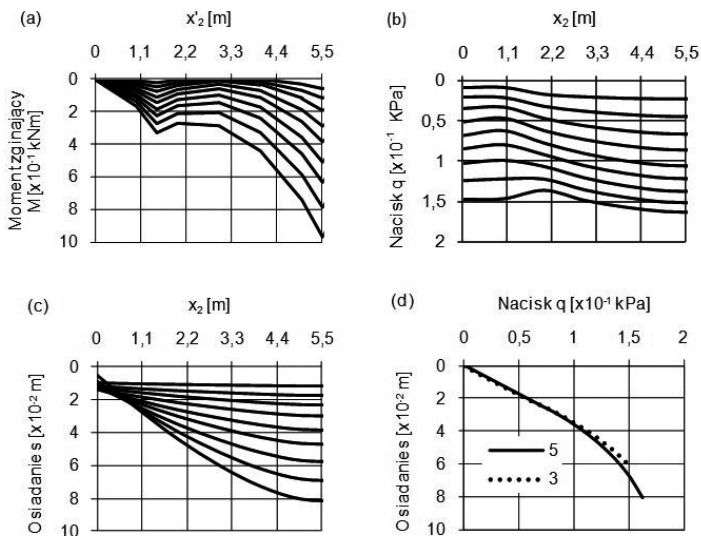


Rys. 1. Schemat substruktur „ława fundamentowa–podłoże gruntowe”

TABELA 1

Parametry modeli materiału ławy i gruntu podłoża

| E_b [kPa] | ν_b | E [kPa] | ν | m | κ | λ |
|----------------|---------|--------------|-------|-------|----------|-----------|
| 18000 | 0,1667 | 40 | 0,3 | 1,348 | 0,034 | 0,17 |



Rys. 2. Wykresy: (a) momentów zginających, (b) nacisków, (c) osiadań, (d) charakterystyka „nacisk-osiadań”

Wyniki obliczeń (wykonanych za pomocą programu S2BF) przedstawiono na rysunku 2. Zawierają one komplet charakterystyk (ograniczonych do połowy symetrycznego układu), obejmujących narastające w kolejnych 9 przyrostach rozkłady momentów zginających, pionowych nacisków i osiadań brzegu podłoża pod ławą. Dla dwóch środków elementów kontaktowych (leżących pod węzłami ławy (3) i (5)) wykreślona została charakterystyka „nacisk–osiadanie”.

Wzrostowi obciążenia ławy fundamentowej towarzyszy „narastanie” wykresów momentów i osiadań (stopniowo rosnących pod środkiem i malejących pod końcami), oraz bardziej złożony przyrost nacisków pod ławą (charakteryzujący się początkowo zdecydowanie szybszym ich narastaniem pod środkiem niż na końcach, z późniejszym odwróceniem trendu tzn. szybszym przyrostem pod końcami niż pod środkiem). Charakterystyki „nacisk-osiadanie” (dla środków elementów brzegowych leżących pod węzłami ławy (3) i (5)) po początkowo prawie liniowym fragmencie, mają później zdecydowanie nieliniowy kształt.

8. Podsumowanie

Przedstawiona koncepcja analizy MES-MKEB trójwymiarowego problemu współdziałania układu „ława fundamentowa–podłoże gruntowe” stanowi efektywne narzędzie obliczeniowe. Posiada ona szereg zalet, których pozbawione są stosowane klasycznie metody „składowe”. Najistotniejszą z nich jest znaczne ograniczenie rozmiarów macierzy sztywności układu i głównego układu równań do węzłów substrukury „ława fundamentowa–podłoże”, uwzględniającej jedynie węzły kontaktowe podłoża. Dalszy rozwój metody wymaga uwzględnienia niejednorodności geologicznej podłoża.

LITERATURA

- [1] *Zienkiewicz O. C., Taylor R.L.*: The Finite Element Method. Fourth Edition, Vol. 1 & 2, McGraw-Hill Book Company, London 1991
- [2] *Banerjee P.K., Butterfield R.*: Boundary Element Methods in Engineering Science. McGraw-Hill Book Company, London 1981
- [3] *Cheung Y.K.*: Beams, Slabs and Pavements, [w:] Desai Ch. S. and Christian J. T., Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill Book Company, New York 1977, p. 194–210
- [4] *Gryczmański M.*: Metoda elementów kontaktowych i jej zastosowanie do obliczania belek na półprzestrzeni sprężysto-lepkoplastycznej, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, Budownictwo z. 21, Nr 97/1984, Opole 1984, s. 128–139
- [5] *Fedczuk P.*: Ława fundamentowa na podłożu nieliniowo odkształcalnym. Praca doktorska, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Opole 1992
- [6] *Nayak G.C., Zienkiewicz O.C.*: Elasto-plastic Stress Analysis. A Generalized for Various Constitutive Relations Including Strain Softening. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.5, 1972, p. 113–135
- [7] *Roscoe K.H., Burland J.B.*: On the Generalized Stress-strain Behavior of “wet” Clay. [w:] Heymann J., Leckie F. A., Engineering Plasticity, Cambridge University Press, 1968, p. 535–609