

*Jacek Jakubowski**

UOGÓLNIENIA METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W INŻYNIERSKICH SYMULACJACH NUMERYCZNYCH OŚRODKA NIECIĄGŁEGO I DYSKRETNEGO**

1. Wprowadzenie

Klasyczna metoda elementów skończonych jest metodą wydajną i uniwersalną, z zastosowaniem wielu dostępnych pakietów — również łatwą w użyciu. W zastosowaniu do symulacji nieciągłego ośrodka z odwzorowaniem nieciągłości wprost ma jednak pewne istotne ograniczenia. W ciągu ostatnich kilkunastu lat pojawiły się uogólnienia tej metody stosujące generalnie rzecz ujmując nowe metody aproksymacji, z których wiele opartych jest na tzw. podziale jedności. W rezultacie, na bazie metody elementów skończonych i metody różnic skończonych, powstały metody bezsiatkowe (MFree), metody wzbogaconej aproksymacji metody elementów skończonych (XFEM) i metoda różnicowości numerycznych (MM). Wszystkie te metody mają zdolność naturalnego odwzorowania nieciągłości bez kłopotliwych operacji przebudowy siatki. Każda z nich jest zdolna do symulacji ośrodka ciągłego, ośrodka nieciągłego oraz rozpadu ośrodka w jednym, spójnym schemacie numerycznym (każda z nich w innym). Po uzupełnieniu o algorytmy rozpoznawania kontaktów metody te nabierają cech metod elementów dyskretnych. Są to na razie rozwiązania laboratoryjne, nad którymi pracują matematycy, numerycy i programiści, które nie trafiły jeszcze w ręce inżynierów. Jednak w przyszłości ze względu na swoje cechy mogą stanowić alternatywę dla metody elementów skończonych i metody elementów odrębnych w symulacjach geomechanicznych i budowlanych.

2. Odwzorowanie nieciągłości w MES

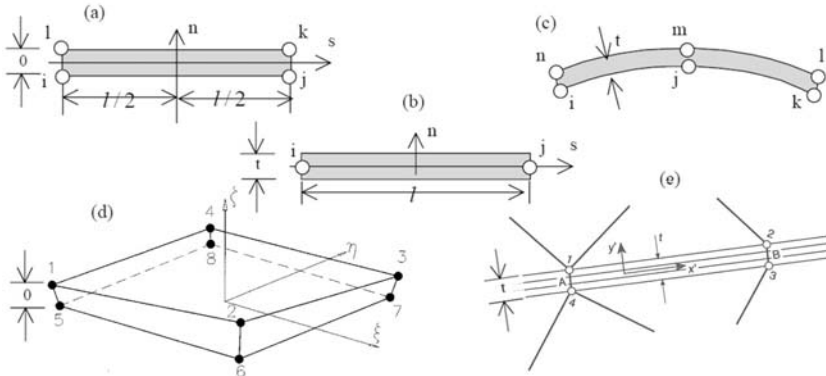
Mechaniczne oddziaływanie nieciągłości i sieci nieciągłości jest realizowane w modelach metody elementów skończonych (ale też i innych metodach ośrodka ciągłego lub

* Katedra Geomechaniki Budownictwa i Geotechniki, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

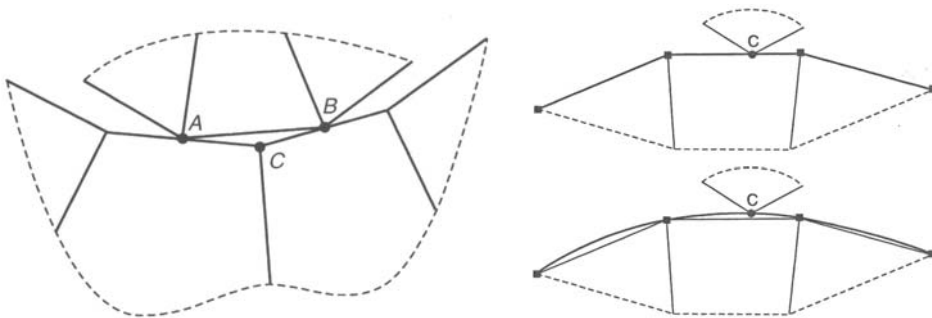
** Przygotowano w ramach badań statutowych AGH nr 11.11.100.197

dyskretnego) zasadniczo na cztery sposoby:

- 1) Pośrednio, przy pomocy continuum o ekwiwalentnych parametrach.
- 2) Wprost przy pomocy elementów łączących (*joint element, segment-to-segment element*) pokrywających powierzchnie nieciągłości (rys. 1),
- 3) Wprost przy pomocy predefiniowanych powierzchni kontaktu (w schemacie *master-slave, general contact, self-contact* lub innych) (rys. 2),
- 4) wprost przy pomocy specjalnych sformułowań, takich jak XFEM, MFree, MM.



Rys. 1. Przykłady elementów łączących w metodzie elementów skończonych
 (a) element Goodmana [18], (b) Ghaboussiego [16], (c) Zienkiewicza [67], [22],
 (d) Buczkowskiego i Kleibera [10], (e) cienki element laminarny [64]

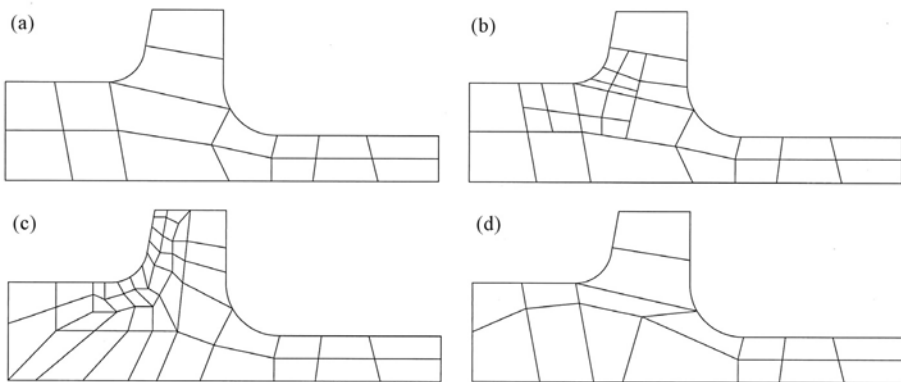


Rys. 2. Po lewej kontakt elementów skończonych.
 Po prawej u góry kontakt węzeł–powierzchnia z interpolacją elementową
 a na dole z wygładzoną interpolacją [65]

Klasyczna metoda elementów skończonych nadaje się bardzo dobrze do pośredniej symulacji nieciągłego masywu skalnego w schemacie ekwiwalentnego continuum. Nadaje się również do symulacji wprost nieciągłości i nieciągłego masywu skalnego, ale jedynie z nielicznymi powierzchniami nieciągłości. Istnienie w modelu wielu nieciągłości odwzorowanych wprost przy pomocy elementów łączących lub powierzchni kontaktu bardzo

utrudnia zbudowanie dobrej jakości siatki elementów skończonych, szczególnie w modelach przestrzennych, może wywoływać złe uwarunkowanie macierzy i problemy ze zbieżnością rozwiązania oraz negatywnie wpływa na dokładność rozwiązania. Wprowadzenie każdej nowej lub modyfikacja istniejącej powierzchni nieciągłości wymaga ręcznej lub automatycznej przebudowy siatki w dużym obszarze. Symulacja propagacji szczelin i stref spękania również wymaga przebudowy siatki elementów skończonych, co zwiększa koszt obliczeń i powoduje problemy techniczne.

Metody adaptacyjne umożliwiły postęp i częściowo rozwiązywały wiele problemów i ograniczeń klasycznej metody elementów skończonych. Adaptacyjna, automatyczna przebudowa siatki, optymalizuje siatkę i poprawia dokładność wyników możliwie najmniejszym kosztem numerycznym (rys. 3). Przebudowa siatki dostosowuje ją do zmienionej geometrii zadania w trakcie symulacji (np. przy dużych deformacjach czy propagacji pęknięć). Automatyczna generacja siatki, która jest bardzo skuteczna i efektywna w zagadnieniach płaskich, napotyka na duże, ciągle nie rozwiązane trudności w modelach przestrzennych.



Rys. 3. Przebudowa siatki elementów skończonych metodą h-adaptacji [66]:
 (a) oryginalna siatka (b) podział elementów na mniejsze
 (c) całkowita przebudowa siatki (d) zmiana położenia węzłów

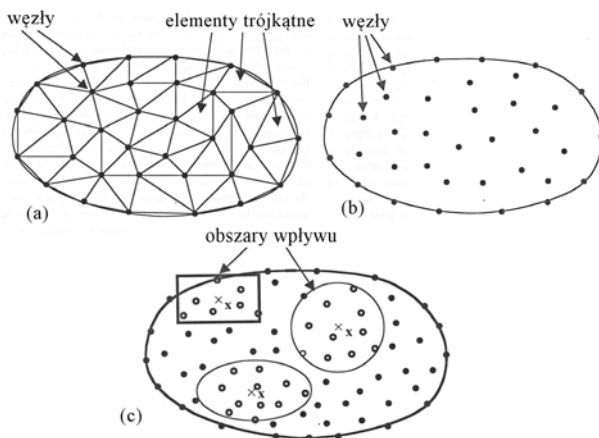
Nowe sformułowania metody elementów skończonych ze wzbogacaniem aproksymacji, metody bezsiatkowe i metoda różnicowości obiecują niemal całkowite uwolnienie od większości ograniczeń tradycyjnej metody elementów skończonych w symulacji nieciągłości i nieciągłego masywu skalnego.

3. Metody bezsiatkowe

Skoro struktura elementów z predefiniowanymi kształtami, wymiarami i relacjami pomiędzy węzłami jest źródłem pewnych ograniczeń metody elementów skończonych, zupełnie naturalne jest poszukiwanie rozwiązań bezelementowych lub bezsiatkowych.

Metody bezsiarkowe (ang. *meshfree*, *meshless*, *element free*, w skrócie MFree) są generalnie metodami numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych opisujących zjawiska fizyczne, w tym problemy inżynierskie. W metodach bezsiarkowych nie ma elementów połączonych w siatkę, są jedynie punkty (węzły) reprezentujące obszar i brzeg modelu bez z góry zdefiniowanych ścisłych relacji [31]. Dodawanie lub likwidowanie węzłów nie ma żadnych skutków dla węzłów sąsiednich i nie wymaga przeorganizowania całej struktury siatki na około jak w przypadku MES. Zdefiniowanie nieciągłości lub dołożenie nowej płaszczyzny nieciągłości nie wymaga przebudowy modelu, co najwyżej zagęszczenia węzłów. W obszarach, gdzie istotna jest duża dokładność obliczeń (np. w strefach koncentracji naprężeń lub w okolicy wierzchołka pęknięcia), również nie trzeba przebudowywać siatki, wystarczy dodać tam węzły, aby uzyskać wysoką dokładność. Podejście adaptacyjne z zastosowaniem metod bezsiarkowych jest na tyle łatwe do algorytmizacji i automatyzacji, że nie wymaga ręcznej ingerencji w 2D ani w 3D. Metody bezsiarkowe wydają się zatem ciekawą alternatywą dla MES w rozwiązaniach liniowych, nieliniowych, statycznych i dynamicznych problemów mechaniki ciała stałego oraz geomechaniki.

W metodach elementów skończonych i brzegowych struktura siatki jest wykorzystywana do dyskretyzacji i aproksymacji złożonych równań różniczkowych cząstkowych przy pomocy układu równań algebraicznych. Metody bezsiarkowe dla sformułowania układu równań algebraicznych wykorzystują zbiór węzłów, który reprezentuje a nie dyskretyzuje obszar i jego brzeg (rys. 4). Niektóre metody bezsiarkowe przeprowadzają całkowanie w oparciu o proste, pomocnicze siatki, ale żadne nie wykorzystują siatek do interpolacji.



Rys. 4. Po lewej: siatka węzłów i elementów skończonych dyskretyzująca obszar. Po prawej: węzły metody bezsiarkowej reprezentujące obszar i brzeg modelu [31].
 Na dole: obszar wpływu obejmujący węzły wykorzystane do interpolacji i budowy funkcji kształtu dla punktu x (który może ale nie musi być węzłem) [31]

Funkcje kształtu w metodzie elementów skończonych są budowane dla elementów, są takie same dla wszystkich elementów o tym samym kształcie i są znane przed uruchomie-

niem symulacji. W metodach bezsiatkowych funkcje kształtu po pierwsze są budowane dla wybranych punktów i są różne dla różnych punktów. Po drugie są budowane w oparciu o węzły. Po trzecie są budowane w trakcie a nie przed symulacją. Budowa funkcji kształtu jest kluczowym problemem metod bezsiatkowych, dlatego tak ważny jest wybór i właściwości metody aproksymacyjnej stosowanej do budowy funkcji kształtu.

W klasycznej metodzie elementów skończonych właściwości materiałowe można swobodnie definiować w obszarze, nawet dla każdego pojedynczego elementu z osobna. W metodach bezsiatkowych można co prawda definiować strefy o różnych właściwościach materiałowych, ale ciągle nierozwiązane są problemy z reprezentacją powierzchni granicznej i dokładnością szacunków naprężeń w pobliżu tej powierzchni [31].

Przykładanie warunków brzegowych w metodach bezsiatkowych jest przeprowadzane według podobnych zasad jak w MES, ale przyłożenie warunków przemieszczeniowych w niektórych metodach bezsiatkowych wymaga pewnych dodatkowych operacji i nie jest tak łatwe jak w MES. Metody bezsiatkowe różnią się od siebie, ale można wskazać kilka wspólnych etapów budowy modelu i symulacji:

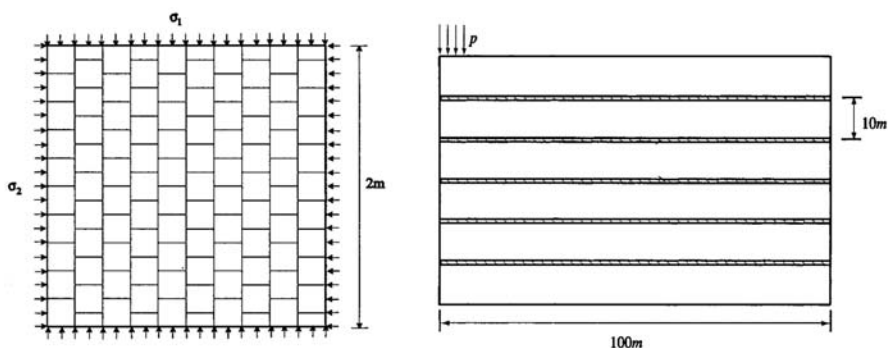
- 1) Generacja węzłów reprezentujących obszar i brzeg modelu. Zadanie warunków brzegowych (lub tylko obciążeniowych warunków brzegowych).
- 2) Interpolacja przemieszczeń i budowa funkcji kształtu na podstawie węzłów w lokalnym obszarze wpływu.
- 3) Utworzenie układów równań dla węzłów i złożenie ich do globalnego układu równań (zadanie przemieszczeniowych warunków brzegowych).
- 4) Rozwiązanie globalnego układu równań, obliczenie przemieszczeń.
- 5) Obliczenie pól odkształceń i naprężeń.

Macierze sztywności metod bezsiatkowych są macierzami pasmowymi, symetrycznymi lub nie, w zależności od metody. Dokładność uzyskiwana metodami bezsiatkowymi jest generalnie lepsza niż MES, ale czas obliczeń dłuższy, niekiedy nawet kilkadziesiąt razy [5, 31]. W ostatnich latach można zaobserwować znaczną poprawę wydajności algorytmów najlepszych metod bezsiatkowych. Dostępne aplikacje bezsiatkowe to głównie programy akademickie wykorzystywane do sprawdzania rozwiązań i badania właściwości szczególnych sformułowań. Nieliczne, specjalizowane programy komercyjne nie stanowią uniwersalnych platform symulacji inżynierskich i nie dorównują na razie systemom MES.

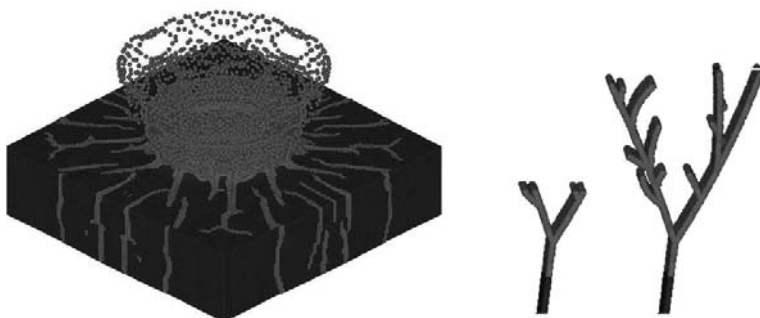
Metody bezsiatkowe rozwinęły się gwałtownie w latach 90., ale ciągle wiele ich istotnych problemów czeka na rozwiązanie. Trwa dyskusja i ocena ważniejszych sformułowań oraz standaryzacja nazewnictwa. Ważniejsze, utrwalone już w bibliografii metody bezsiatkowe (w oryginalnym angielskim nazewnictwie) to: Boundary node method [40], Boundary point interpolation method [19], Element free Galerkin method (EFG) [6], Finite point method (FPM) [29, 44], hp cloud method [14, 30], Local boundary integral equation (LBIE) methods [3], Local Petrov–Galerkin (MLPG) [3], Method of finite spheres [13], Moving least squares reproducing kernel method (MLSRK) [33], Natural element method (NEM) [59], Particle finite element method (PFEM) [20], Partition of unity method (PUM) [4], Reproduction kernel particle method (RKPM) [32], Smooth par diffuse element method (DEM) [42], Smooth particle hydrodynamics (SPH) [34].

Metody bezsiatkowe są zwykle kojarzone i porównywane z MES, dlatego warto przypomnieć, że za jedną z pierwszych metod bezsiatkowych uważana jest uogólniona MRS dla dowolnych nieregularnych siatek opracowana przez Liszkę, Orkisz, Kroka i innych [25, 29] nazywana obecnie Finite point method. Dorobek tej metody przyczynił się generalnie do rozwoju metod bezsiatkowych, w szczególności metody hp-cloud. Metody bezsiatkowe są również wykorzystywane w sformułowaniach mających swoje źródła w metodzie elementów brzegowych, na przykład Boundary node method [40].

Na rysunkach 5, 7 i 6 pokazano przykłady zastosowania metod bezsiatkowych. Metody bezsiatkowe, posiadają aparat do bardzo dobrej i efektywnej symulacji propagacji pęknięć, dlatego w przyszłości metody te mogą być szczególnie przydatne do symulacji stref zniszczenia i rozwoju sieci szczelin w masywie skalnym. Połączenie ich z algorytmami wykrywania kontaktu [27] otwiera możliwość rozwiązywania zadań typowych dla metod elementów dyskretnych oraz symulacji rozpadu ośrodka skalnego [48]. Wszystko to może spowodować, że metody bezsiatkowe będą miały zastosowanie w symulacji nieciągłego i blokowego masywu skalnego oraz inne zastosowania w geoinżynierii [46, 55, 62] i budownictwie [8, 47].

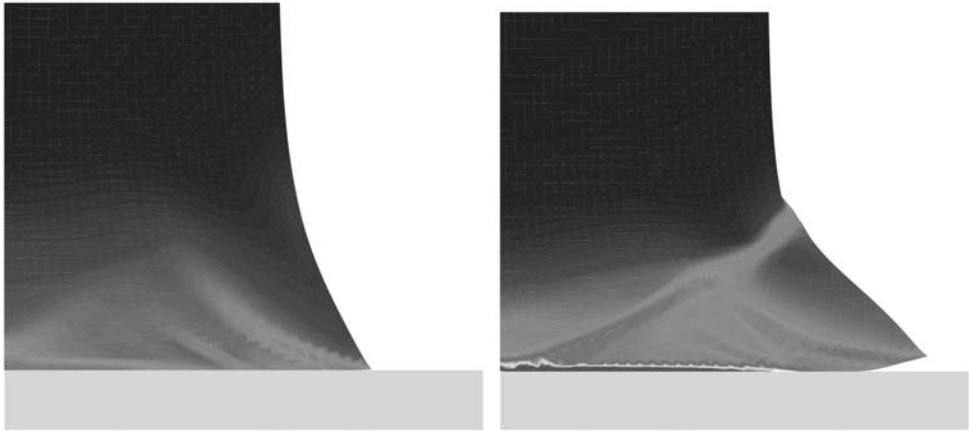


Rys. 5. Przykład zastosowania metod bezsiatkowych.
Proste modele numeryczne masywu skalnego [62]



Rys. 6. Przykłady zastosowania bezsiatkowej metody EFG.
Po lewej symulacja eksplozji ładunku wybuchowego na powierzchni betonowej płyty [48]. Po prawej symulacja propagacji pęknięć [48]

Jednak najpierw muszą być rozwiązane istniejące problemy metod bezsiatkowych, w tym poprawiona szybkość obliczeń i muszą one zostać zaimplementowane w postaci szeroko dostępnych komercyjnych lub niekomercyjnych aplikacji.



Rys. 7. Przykład zastosowania bezsiatkowej metody RKPM (*Reproducing Kernel Particle Method*) i bezsiatkowego algorytmu wykrywania kontaktu. Symulacja uderzenia odkształcalnego pręta w sztywną płytę. Połowa przekroju modelu osiowoosymetrycznego [27]

4. Metody wzbogacania aproksymacji elementów skończonych

Pod koniec lat dziewięćdziesiątych atrakcyjną alternatywą dla metod bezsiatkowych stały się warianty metody elementów skończonych, które kosztem wzbogacenia węzłów i elementów siatki elementów skończonych o dodatkowe stopnie swobody pozwalają na dowolne odwzorowanie predefiniowanych lub propagujących nieciągłości wewnątrz elementów bez potrzeby przebudowy siatki elementów. Były to:

- uogólniona metoda elementów skończonych (Generalized FEM), która do aproksymacji wykorzystuje lokalne rozwiązania analityczne [4, 57, 58],
- metoda oparta na niejednorodnej aproksymacji metodą hp-cloud [43],
- hierarchiczna MES wykorzystująca koncepcję podziału jedności [60],
- wreszcie najbardziej obecnie znana tzw. rozszerzona metoda elementów skończonych (eXtended FEM, XFEM) [38] wprowadzająca specjalne funkcje przemieszczenia do standardowej metody elementów skończonych i umożliwiającą odwzorowanie praktycznie dowolnej geometrii nieciągłości.

Nie jest przypadkiem, że twórcy XFEM i pokrewnych metod wcześniej rozwijali metody bezsiatkowe. Pomostem pomiędzy metodami bezsiatkowymi i metodą elementów skończonych w sformułowaniach XFEM są wspólne techniki aproksymacyjne a szczególnie tzw. podział jedności (ang. partition of unity). Podział jedności to zbiór m dodatnich, ciągłych C_0 funkcji $f_k(\mathbf{x})$ dla których zachodzi:

$$\sum_{k=1}^m f_k(x) = 1 \quad (1)$$

Można udowodnić, że dla dowolnej funkcji $\psi(x)$ zachodzi wtedy również:

$$\sum_{k=1}^m f_k(x)\psi(x) = \psi(x) \quad (2)$$

W klasycznej MES, funkcje kształtu N_j są podziałem jedności i dla elementu o n węzłach:

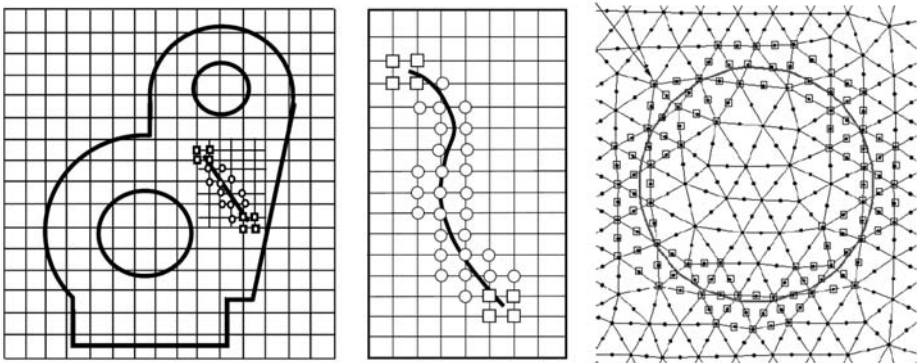
$$\sum_{j=1}^n N_j = 1 \quad (3)$$

Na koncepcji podziału jedności opierają się funkcje wzbogacające w metodzie XFEM i innych [23, 39, 61].

Aproksymacja nieciągłego pola przemieszczeń opiera się na specjalnie dobranych funkcjach kształtu, zdefiniowanych przy pomocy funkcji wzbogacających. Dla zdefiniowania brzegu nieciągłości i dla aproksymacji pola przemieszczeń tworzone są dodatkowe, niezależne, wirtualne stopnie swobody.

Geometria modelu i nieciągłości w metodzie XFEM nie musi być zgodna z siatką elementów skończonych a dołożenie lub likwidacja nieciągłości w modelu nie wymaga przebudowy siatki (rys. 8). Stosunkowo niewielkim kosztem dodatkowych stopni swobody uzyskuje się przy tym znaczną poprawę dokładności rozwiązania w pobliżu nieciągłości. Mimo że XFEM została opracowana z myślą o propagacji pęknięć, jej zalety mogą być wykorzystywane w wielu innych problemach, szczególnie w mechanice skał, gdzie liczne nieciągłości, propagacja sieci szczelin i stref spękania mają wielkie znaczenie ale są trudne do symulacji innymi metodami.

XFEM ma wiele nie rozwiązanych w zadawalający sposób problemów, ale jest dopiero na wczesnym etapie rozwoju, ciągle następuje gwałtowny postęp koncepcyjny.



Rys. 8. Po lewej — geometria modelu XFEM nie musi być zgodna z siatką elementów [22].

W środku — nieciągłość i wzbogacone węzły wokół niej. Po prawej — zwykle i wzbogacone węzły wokół nieciągłości geometrycznych na nieregularnej siatce elementów skończonych [23]

Poligonem rozwojowym tej metody jest mechanika pękania [37, 56, 63]. Metoda ma zastosowanie w symulacji zachowania się materiałów kompozytowych [41] i problemach dużych deformacji [15]. Niedawno Menouillard i inni [36] przedstawili całkowicie jawne sformułowanie XFEM. Réthoré i inni [49] wykorzystali koncepcję podziału jednostki dla zmiennej czasowej do sformułowania metody Time eXtended FEM (TXFEM).

Nieciągłości w metodzie XFEM są odwzorowywane w inny sposób niż w klasycznej MES i oddziaływania na kontakcie pomiędzy powierzchniami tych nieciągłości muszą być również obsługiwane w inny sposób. Najczęściej stosuje się różne modele z tarcieniem na kontakcie lub ze strefą kontaktową. Kontakt na powierzchniach nieciągłości jest przedmiotem zainteresowania badaczy od powstania XFEM i następuje szybki postęp w jakości rozwiązań i zakresie symulowanych oddziaływań kontaktowych. Znane są wydajne metody śledzenia przemieszczających się kontaktów [45], z zastosowaniem których XFEM może w przyszłości efektywnie rozwiązywać nawet bardzo złożone problemy kontaktowe [1, 2, 24]. Bardzo ciekawa jest zaproponowana przez Belytschkę i innych [9] technika przejścia z rozwiązaniem XFEM od ośrodka ciągłego do dyskretnego.

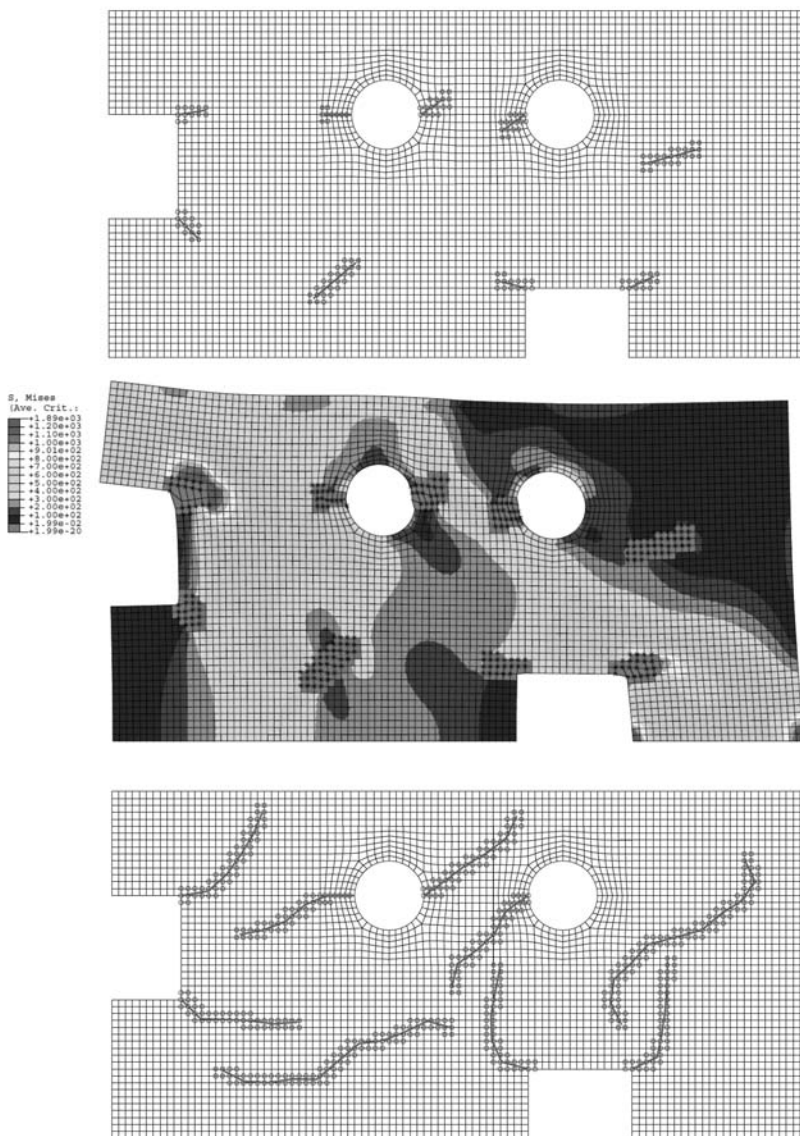
Zaletami XFEM są zdolność do odwzorowywania geometrii nieciągłości niezależnie od siatki elementów skończonych, łatwa symulacja postępującej propagacji spękań i dokładność estymacji w pobliżu nieciągłości. Oprócz tego metoda wykorzystuje zalety tradycyjnej MES w symulacji niejednorodności i nieliniowości materiału oraz łatwość zadawania warunków brzegowych. Łączy zatem zalety standardowych metod siatkowych i metod bezsiatkowych. Wydaje się, że w przyszłości może być szczególnie przydatna do symulacji nieciągłego masywu skalnego i rozwiązywania problemów geomechaniki, geotechniki i budownictwa [7, 22].

Poza programami akademickimi i niewielkimi systemami open source nie jest zaimplementowana w rozwiązaniach komercyjnych. Wyjątkiem jest systemem ABAQUS, który od wersji 6.9 wypuszczonej połowie 2009 udostępnia swoim użytkownikom procedury XFEM przeznaczone do symulacji propagacji pęknięć (rys. 9).

5. Metoda różnicowości numerycznych

Metodę różnicowości (ang. *Manifold method* lub *Numerical manifold method*, w skrócie MM lub NMM) można uważać za uogólnienie metody elementów skończonych, łączące w jednorodnej formalnie postaci techniki analityczne metody elementów skończonych i analizy nieciągłych deformacji [21, 50, 51, 53]. Pojęcie „różnicowości” pochodzi od różnicowości różniczkowych i zostało zaczerpnięte przez Gen-Hua Shi z topologii i geometrii różniczkowej. Różnicowości w metodzie MM łączą wiele różnych nakładających się na siebie i pokrywających cały obszar modelu obszarów.

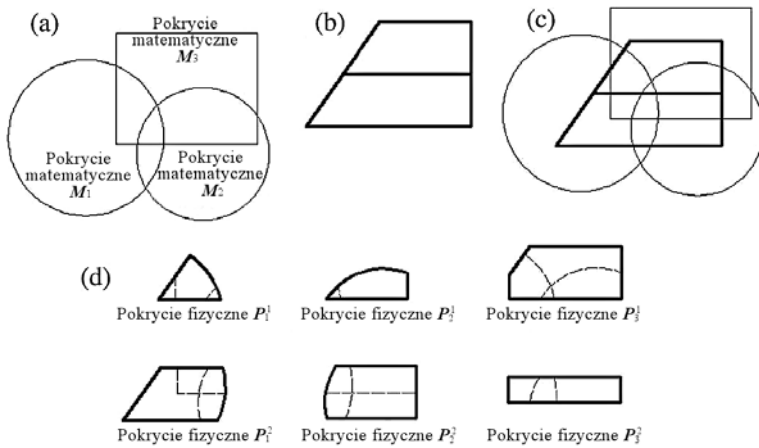
Kluczem do jednolitego traktowania deformacji ciągłych i nieciągłych jest struktura pokryć skończonych zbudowana z oddzielnych i niezależnych siatek matematycznej i fizycznej. Siatka fizyczna opisują fizyczny obszar modelu jego brzeg, nieciągłości i strefy różniące się właściwościami fizycznymi. Siatka matematyczna nie zależy od geometrii modelu ani właściwości materiału i może być definiowana niezależnie od nich. Składa się z matematycznych pokryć o dowolnych kształtach i wymiarach, których suma zawiera cały obszar modelu fizycznego.



Rys. 9. Problem propagacji wielu korbów metodą XFEM, ABAQUS 6.9/Standard [17].
 U góry — początkowa geometria i układ korbów. W środku — wyężenie Hubera dla początkowej geometrii. Na dole — propagacja korbów po pięciu quasi-stacycznych przyrostach. Na schematach u góry i na dole widać wzbogacone węzły XFEM

Na rysunku 10 pokazano przykładowe siatki (a) matematyczną składającą się z trzech matematycznych pokryć oraz (b) siatkę fizyczną definiującą brzeg i poziomą nieciągłość. Złożenie tych dwóch siatek daje opis problemu w metodzie różnicowości. Przecięcie matematycznego pokrycia i sieci fizycznej nazywane jest pokryciem fizycznym. Na przykład przecięcie pokry-

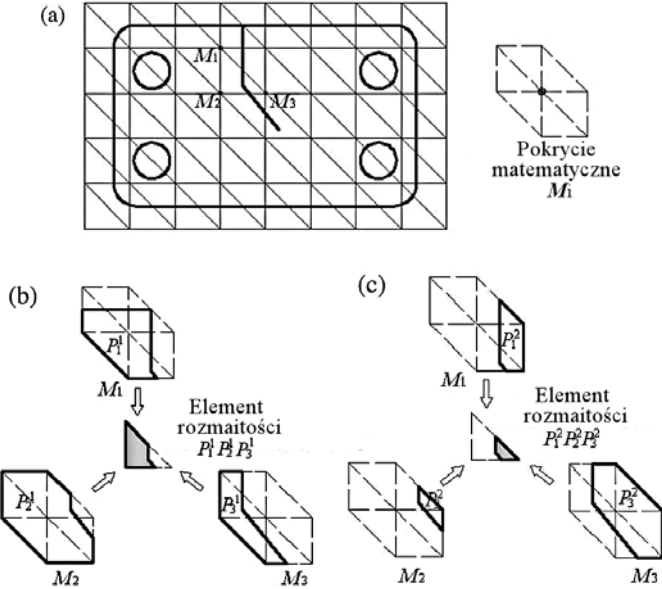
cia matematycznego M_1 i sieci fizycznej daje dwa przecięcia fizyczne oznaczone P_1^1, P_1^2 . Dwa przecięcia dlatego, że nieciągłość dzieli pokrycia matematyczne na dwie części i wyodrębnia dwa rozłączne pokrycia fizyczne. Część wspólna pokryć fizycznych nazywana jest elementem rozmaitości. Rysunek 11 ilustruje sposób definiowania elementów rozmaitości na przykładzie płaskiego zagadnienia. U góry (a) widać nałożone na siebie dwie siatki: matematyczną (regularna na bazie trójkątów, cienkie linie) i fizyczną (geometria obszaru, grube linie). Wszystkie pokrycia matematyczne mają kształt wieloboku, jak pokazane obok pokrycie matematyczne M_1 . Przecięcie pokrycia matematycznego M_2 i siatki fizycznej daje pokrycia fizyczne P_2^1 i P_2^2 widoczne na rysunku 11 (b) i (c). Wszystkie pokrycia fizyczne widoczne na rysunku 11 b i c (P_1^1, P_2^1, P_3^1 oraz P_1^2, P_2^2, P_3^2) otrzymano analogicznie. Na rysunku 11 (b) widać jak część wspólna trzech fizycznych pokryć P_1^1, P_2^1, P_3^1 tworzy element rozmaitości a na rysunku 11 (c) jak część wspólna trzech innych fizycznych pokryć P_2^1, P_2^2, P_3^2 tworzy inny element rozmaitości.



Rys. 10. Siatki matematyczna i fizyczna w metodzie rozmaitości:
 (a) siatka matematyczna złożona z trzech pokryć matematycznych;
 (b) siatka fizyczna; (c) nałożenie siatki matematycznej i fizycznej
 (d) pokrycia fizyczne [21]

W schemacie metody rozmaitości, pokrycia fizyczne i elementy rozmaitości są uogólnieniami węzłów i elementów klasycznej metody elementów skończonych.

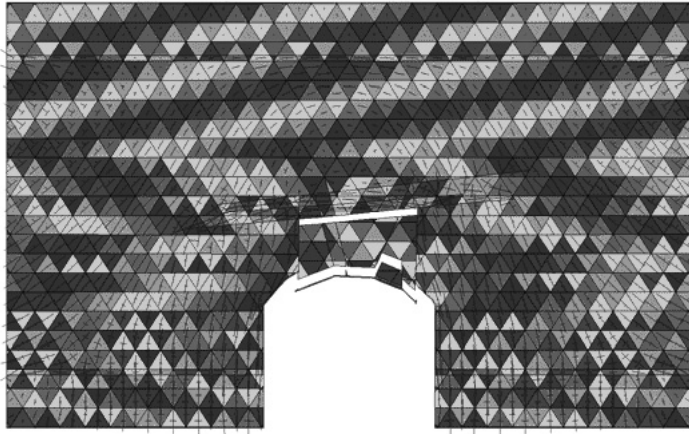
Metoda rozmaitości rozdziela dziedzinę aproksymacji od dziedziny całkowania w ten sposób, że ta pierwsza jest definiowana tylko przez pokrycia matematyczne a ta druga tylko przez siatkę fizyczną odpowiadającą geometrii modelu. Pokrycia matematyczne definiują funkcje przemieszczeń a siatka fizyczna ogranicza obszar całkowania. Całkowanie po elementach rozmaitości o dowolnym kształcie odbywa się szczególną metodą sympleksową opracowaną przez [52]. Do aproksymacji wykorzystywany jest podział jednostki, czyli ta sama technika, która jest wykorzystywana w wielu uogólnieniach MES ze wzbogacaniem węzłów oraz niektórych metodach bezsiatkowych. Lokalne funkcje przemieszczeń są zdefiniowane na każdym osobnym pokryciu i połączone razem tworzą globalną funkcję przemieszczeń. Połączenie to odbywa się



Rys. 11. Ilustracja sposobu definiowania elementów rozmaitości: (a) nałożone dwie siatki: matematyczna i fizyczna (b) i (c) pokrycia fizyczne i elementy rozmaitości otrzymane jako część wspólna pokryć fizycznych [21]

za pomocą wag spełniających warunek podziału jedności. Globalna funkcja przemieszczeń jest tworzona przy pomocy tych wag z wykorzystaniem właściwości podziału jedności. Globalne zachowanie się modelu jest zatem wyliczane przy pomocy funkcji zdefiniowanych lokalnie. System skończonych pokryć tworzony przez obie siatki i jest na tyle elastyczny, że może odwzorowywać zachowanie się zarówno ciągłych, jak i nieciągłych ośrodków z ruchomymi brzegami (czyli z ewoluującą geometrią modelu tak jak np. w problemach propagacji szczeliny). Siatka matematyczna może być regularna i niezależna od geometrii modelu i występujących w nim nieciągłości, dlatego jej generacja jest bardzo łatwa a modyfikacje sieci nieciągłości lub rozwój pęknięcia nie wymagają adaptacji siatki. Sprawia to, że metoda może być będzie szczególnie przydatna w symulacji nieciągłego masywu skalnego (rys. 12).

Shi zintegrował metodę rozmaitości z algorytmami analizy kinematycznej i wykrywania kontaktów, co uczyniło z niej metodę spełniającą kryteria metody elementów dyskretnych. Oryginalne sformułowanie metody rozmaitości dotyczyło zagadnienia płaskiego [50, 51, 54]. Terada przedstawił nieliniową analizę ośrodka niejednorodnego i nazwał ją metodą pokryć skończonych (ang. *finite cover method FCM*). Bardzo ważnym krokiem było pojawienie się niedawno pierwszych sformułowań i eksperymentalnych programów trójwymiarowej metody rozmaitości [21, 35]. Metoda rozmaitości z algorytmami wykrywania kontaktów łączy metodę symulacji ośrodka ciągłego i dyskretnego [53]. Większość publikacji na razie dotyczy albo rozwiązań płaskich, albo przestrzennych bez wykrywania kontaktów, ale nad metodą rozmaitości pracuje kilka zespołów badawczych i wydaje się, że nastąpi szybki rozwój koncepcyjny metody, i pokonanie problemów wydajności towarzyszących przejściu



Rys. 12. Analiza stateczności wyrobisk w nieciągłym masywie skalnym metoda różnicowości [53]

od rozwiązań płaskich do przestrzennych. Jeżeli tak się stanie i metody różnicowości z eksperymentalnej stanie się komercyjną, jej silna pozycja w mechanice skał, górnictwie, budownictwie i geotechnice wydaje się kwestią czasu. Na razie jednak metoda jest w fazie bardzo wczesnego rozwoju i poza kilkoma akademickimi programami nie są dostępne żadne aplikacje komercyjne. Oprócz twórcy metody Gen-Hua Shi i wymienionych wyżej, do rozwoju metody różnicowości przyczynili się między innymi Chen i inni [11], Chiou i inni [12], Li i inni [26], Lin [28].

6. Podsumowanie

Metoda elementów skończonych jest metodą wydajną i uniwersalną, z zastosowaniem wielu dostępnych pakietów również łatwą w użyciu. Najbardziej kosztownym i trudnym etapem budowy modelu i symulacji MES jest tworzenie siatki elementów i z siatką elementów w klasycznej postaci związanych jest wiele wad tej metody ujawniających się w symulacji nieciągłego masywu skalnego. Nieciągłości muszą być zgodne z geometrią siatki elementów. Predefiniowanie wielu powierzchni nieciągłości poważnie komplikuje geometrię siatki elementów skończonych, wymusza jej zagęszczenie, pogarsza jakość elementów, znacznie utrudnia jej automatyczną generację. Dokładność rozwiązania cierpi na skutek zniekształceń elementów w problemach dużych odkształceń. Symulacja propagacji szczelin wzdłuż dowolnych, złożonych śladów i płaszczyzn niezgodnych z geometrią węzłów jest również trudna. Automatyczna, krokowa przebudowa siatki elementów może zapobiegać deformacjom elementów i dostosowywać siatkę elementów do geometrii sieci nieciągłości ale tylko w modelach płaskich. W symulacjach przestrzennych metody adaptacyjne wymagają wielkich mocy obliczeniowych i nie są wystarczająco efektywne w praktycznych symulacjach dużych problemów geomechanicznych.

Nowe metody takie jak XFEM, MFree i MM zdają się łączyć zalety tradycyjnych sformułowań metod ośrodka ciągłego ze swobodą i efektywnością odwzorowania predefiniowa-

nych lub propagujących nieciągłości. Metody te dysponują już praktycznymi możliwościami symulacji nieciągłości i stref kontaktowych. Każda z tych metod już na obecnym etapie rozwoju ma sformułowania, pozwalające na rozpad obszaru nieciągłego na dyskretne bloki czyli przejście od modelu ośrodka ciągłego do modelu ośrodka dyskretnego. Dysponują algorytmami wykrywania kontaktów i oddziaływań na powierzchniach nieciągłości. Metody te są w trakcie rozwoju i ciągle opracowywane są nowe i lepsze modele mechaniczne i kinetyczne oddziaływań na powierzchniach nieciągłości. Nie stanowią one jeszcze alternatywy dla klasycznych metod, ale mogą nią być już za kilka lat.

LITERATURA

- [1] *Abdelaziz Y., Hamouine A.*: A Survey of the Extended Finite Element. *Computers and Structures* 86, 2008, p. 1141–1151
- [2] *Abdelaziz Y., Nabbou A., Hamouine A.*: A State-of-the-art Review of the X-FEM for Computational Fracture Mechanics. *Applied Mathematical Modelling*, 33(12), 2009, p. 4269–4282
- [3] *Atluri S.N., Kim H.G., Cho J.Y.*: A Critical Assessment of the Truly Local Petrov–Galerkin (MLPG) and Local Boundary Integral Equation (LBIE) Methods. *Comput. Mech.* 24, 1999, p. 348–72
- [4] *Babuska I., Melenk J.M.*: The Partition of Unity Method. *Int. J. Numer. Method Eng.* 40, 1997, p. 727–58
- [5] *Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., Krysl P.*: Meshless Methods. An Overview and Recent Developments. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, 1996, p. 3–47
- [6] *Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L.*: Element-free Galerkin Methods. *Int. J. Numer. Method Eng.* 37, 1994, p. 229–56
- [7] *Belytschko T., Moës N., Usui S., Parimi C.*: Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int. J. Numer. Method Eng.* 50, 2001, s. 993–1013
- [8] *Belytschko T., Organ D., Gerlach C.*: Element-free Galerki Methods for Dynamic Fracture in Concrete. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 187, 2000, p. 385–99
- [9] *Belytschko T., Parimi C., Moës N., Sukumar N., Usui S.*: Structured Extended Finite Element Methods for Solids Defined by Implicit Surfaces. *Int. J. Numer. Method Eng.* 56, 2003, p. 609–35
- [10] *Buczowski R., Kleiber M.*: Elasto-plastic Interface Model for 3D Frictional Orthotropic Contact Problems. *Int. J. Num. Methods Eng.* 40, 1997, p. 599–619
- [11] *Chen G.Q., Ohnishi Y., Ito T.*: Development of High-order Manifold Method. *Int. J. Num. Method Eng.* 43, 1998, p. 685–712
- [12] *Chiou Y.-J., Lee Y.-M., Tsay R.-J.*: Mixed Mode Fracture Propagation by Manifold Method. *Int. J. Fracture* 114, 2002, p. 327–47
- [13] *De S., Bathe K.J.*: The Method of Finite Spheres. *Comput. Mech.* 25, 2000, p. 329–45
- [14] *Duarte C.A.M., Oden J.T.*: An h-p Adaptive Method Using Clouds. *Comput. Method Appl. Mech. Eng.* 139, 1996, p. 237–62
- [15] *Fish J., Yuan Z.*: Multiscale Enrichment Based on Partition of Unity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62, 2005, p. 1341–1359
- [16] *Ghaboussi J., Wilson E.L., Isenberg J.*: Finite Element for Rock Joints and Interfaces. *J. Soil Mech. Div. ASCE*, 1973, p. 833–4899
- [17] *Giner E., Sukumar N., Tarancon J.E., Fuenmayor F.J.*: An Abaqus Implementation of the Extended Finite Element Method. *Engineering Fracture Mechanics*. Preprint submitted, 2008
- [18] *Goodman R.E., Taylor L., Brekke T.*: A Model for the Mechanics of Jointed Rock. *J. Soil Mech. and Found. Div. Proc., ASCE v.94, n. SM 3*, 1968
- [19] *Gu Y.T., Liu G.R.*: A Boundary Point Interpolation Method for Stress Analysis of Solids. *Comput. Mech.* 28 (1), 2002, p. 47–54
- [20] *Idelsohn S., Torrecilla M., Onate E.*: Multi-fluid Flows with the Particle Finite Element Method. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 198, 2009, p. 2750–2767

- [21] *Jiang Q., Zhou C., Li D.*: A three-dimensional Numerical Manifold Method Based on Tetrahedral Meshes. *Computers and Structures* 87 (13–14), 2009, p. 880–889
- [22] *Jing L.A.*: Review of Techniques, Advances and Outstanding Issues in Numerical Modelling for Rock Mechanics and Rock Engineering. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences* 40, 2003, p. 283–353
- [23] *Kaczmarczyk L.*: Numeryczna analiza wybranych problemów mechaniki ośrodków niejednorodnych. *Praca doktorska*, 2006
- [24] *Khoei A.R., Nikbakht M.*: Contact Friction Modeling with the Extended Finite Element Method (X-FEM). *J. Mater. Process. Technol.* 177, 2006, p. 58–62
- [25] *Krok J., Orkisz J.*: A Unified Approach to the FE Generalized Variational FD Method in Non-linear Mechanics. *Concept and Numerical Approach. Discretization methods in structural mechanics, IUTAM/IACM Symposium, Vienna, 1990*, p. 353–362
- [26] *Li S., Cheng Y., Wu Y.-F.*: Numerical Manifold Method Based on the Method of Weighted Residuals. *Comput. Mech.* 35, 2005, p. 470–80
- [27] *Li S., Qian D., Liu W.K., Belytschko T.*: A Meshfree Contact Detection Algorithm. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 190, 2001, p. 3271–92
- [28] *Lin J.-S.*: A Mesh-based Partition of Unity Method for Discontinuity Modeling. *Comput. Method Appl. Mech. Eng.* 192, 2003, p. 1515–32
- [29] *Liszka T., Orkisz J.*: The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Meshes and its Applications in Applied Mechanics. *Comp Struct.* 11, 1980, p. 83–95
- [30] *Liszka T.J., Duarte C.A.M., Tworzydło W.W.*: hp-Meshless Cloud Method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 139, 1996, p. 263–288
- [31] *Liu G.R.*: *Mesh Free Methods. Moving Beyond the Finite Element Method.* CRC Press 2003
- [32] *Liu W.K., Jun S., Zhang Y.F.*: Reproducing Kernel Particle Methods. *Int. J. Numer. Method Fluid.* 20, 1995, p. 1081–106
- [33] *Liu W.K., Li S., Belytschko T.*: Moving Least-square Reproducing Kernel Methods, Part I: Methodology and Convergence. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 143, 1997
- [34] *Lucy L.B.*: A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis. *Astron. J.* 8, 1977, s. 1013–24
- [35] *Luo S.M., Zhang X.W., Lu W.G., Jiang D.R.*: Theoretical Study of Three-dimensional Numerical Manifold Method. *Appl. Math. Mech. English Edition* 26, 2005, p.1126–31
- [36] *Menouillard T., Rethore J., Combescure A., Bung H.*: Efficient Explicit Time Stepping for the Extended Finite Element Method (X-FEM). *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 68, 2006, p. 911–939
- [37] *Mergheim J., Kuh E., Steinman P.*: A Finite Element Method for the Computational Modeling of Cohesive Crack Growth. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63, 2005, p. 276–289
- [38] *Moës N., Dolbow J., Belytschko T.*: A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing. *Int. J. Numer. Method Eng.* 46, 1999. p. 131–50
- [39] *Mohammadi S.*: *Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of Structures.* Blackwell Publishing, Oxford 2008
- [40] *Mukherjee Y.X., Mukherjee S.*: Boundary Node Method for Potential Problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 46, 1999, p. 341–385
- [41] *Nagashima T., Suemasu H.*: Application of Extended Finite Element Method to Fracture of Composite Materials. *European Congees on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering.* Javaskyla, Finland 2004
- [42] *Nayroles B., Touzot G., Villon P.*: Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements. *Comput. Mech.* 10, 1992, p. 307–18
- [43] *Oden J.T., Duarte C.A.M., Zienkiewicz O.C.*: A new Cloud-based hp Finite Element Method. *Comput. Method Appl. Mech. Eng.* 153, 1998, p. 117–26
- [44] *Onate E., Idelsohn S.R., Zienkiewicz O.C. i in.*: A Finite Point Method in Computational Mechanics: Applications to Convective Transport and Fluid Flow. *Int. J. Numer. Method. Eng.* 39, 1996, p. 3839–66

- [45] *Osher S., Sethian J.A.*: Fronts Propagating with Curvature-dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations. *Journal of Computat. Physics* 79, 1988, p. 12–49
- [46] *Ossowski R.*: Metody bezsiatkowe, nowe perspektywy zastosowania w geoinżynierii. Część I. Podstawy teoretyczne. *Inżynieria Morska i Geotechnika* 26(6), 2005, p. 453–456
- [47] *Rabczuk T., Belytschko T.*: Application of Particle Methods to Static Fracture of Reinforced Concrete Structures. *International Journal of Fracture* 137, 2006, p. 19–49
- [48] *Rabczuk T., Belytschko T.*: A Three-dimensional Large Deformation Meshfree Method for Arbitrary Evolving Cracks. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng* 196, 2007, p. 2777–2799
- [49] *Réthoré J., Gravouil A., Combescure A.*: A Combined Space-time Extended Finite Element Method. *International Journal for numerical methods in Engineering* 64(2), 2005 p. 260–284
- [50] *Shi G.H.*: Manifold Method of Material Analysis. *Transactions of the ninth army conference on applied mathematics and computing*, p. 57–76. Minneapolis MN 1991
- [51] *Shi G.H.*: Modeling Rock Joints and Blocks by Manifold Method. *Proceedings of the 32nd US Rock Mechanics Symposium*, Santa Fe, NM, 1992, p. 639–48
- [52] *Shi G.H.*: Simplex Integration for Manifold Method, FEM, DDA and Analytical Analysis. *Proceedings of the First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis (DDA) and Simulations of Discontinuous Media*, Berkeley, CA, 1996, p. 206–63
- [53] *Shi G.H.*: Recent Applications of Discontinuous Deformation Analysis and Manifold Method. *The 42nd U.S. Rock Mechanics Symposium (USRMS)*, American Rock Mechanics Association 2008, San Francisco, CA, 2008
- [54] *Shi G.H.*: Manifold Method. *Proceedings of the First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis (DDA) and Simulations of Discontinuous Media*, Berkeley, CA, 1996, p. 52–204
- [55] *Sikora Z., Ossowski R.*: Metody bezsiatkowe — czy jest na nich miejsce w geoinżynierii? *Rozwiązanie zagadnienia Flamanta metodą MLPG*. *Geoinżynieria: drogi, mosty, tunele*, nr 3, 2007, p. 42–46
- [56] *Stolarska M., Chopp D.L., Moes N., Belytschko T.*: Modeling Crack Growth by Level Sets in the Extended Finite Element Method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 51, 2001, p. 943–960
- [57] *Strouboulis T., Copps K., Babuska I.*: The Generalised Finite Element Method: an Example of its Implementation and Illustration of its Performance. *Int J Numer Meth Eng.* 47, 2000, p. 1401–17
- [58] *Strouboulis T., Copps K., Babuska I.*: The Generalized Finite Element Method. *Comput Meth Appl Mech Eng.* 190, 2001, p. 4081–193
- [59] *Sukumar N., Moran B., Belytschko T.*: The Natural Element Method in Solid Mechanics. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 43, 1998, p. 839–87
- [60] *Taylor R.L., Zienkiewicz O.C., Onate E.*: A Hierarchical Finite Element Method Based on the Partition of Unity. *Comput. Method Appl. Mech. Eng* 152, 1998, p. 73–84
- [61] *Wells G.N.*: *Discontinuous Modelling of Strain Localisation and Failure*. PhD thesis, Delft University of Technology 2001
- [62] *Zhang X., Lu M., Wegner J.L.*: A 2-D Meshless Model for Jointed Rock Structures. *Int. J. Num. Methods Eng.* 47, 2000, p. 1649–61
- [63] *Zi G., Belytschko T.*: New Crack-tip Elements for XFEM and Application to Cohesive Cracks. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 57, 2003, p. 2221–2240
- [64] *Zienkiewicz O.C.*: *Metoda elementów skończonych*. Arkady, Warszawa 1972
- [65] *Zienkiewicz O.C., Taylor R. L.*: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Amsterdam 2006.
- [66] *Zienkiewicz O.C., Taylor R. L., Zhu J. Z.*: *The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Amsterdam 2005
- [67] *Zienkiewicz O.C., Best B., Dullage C., Stagg K.*: *Analysis of Nonlinear Problems in Rock Mechanics with Particular Reference to Jointed Rock Systems*. *Proceedings of the Second International Congress on Rock Mechanics*, Belgrade 1970