

Marian Paluch*, Michał Bettej*

ANALIZA WPŁYWU STAŁYCH FIZYCZNYCH I GEOMETRYCZNYCH NA DEFORMACJE WALCOWYCH KONSTRUKCYJNYCH ELEMENTÓW GUMOWYCH

1. Wstęp

Przedmiotem pracy jest analiza stanu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia gumowych, walcowych łączników przeprowadzona na podstawie nieliniowej teorii sprężystości ośrodków odkształcalnych. Gumowe elementy sprężyste mają szerokie zastosowanie z uwagi na ich zalety techniczne i technologiczne. Materiał gumowy, tzw. elastomer powstaje na bazie różnych kauczuków z mieszanki gumowej zawierającej szereg dodatków wpływających na właściwości fizyczne i mechaniczne.

Zarówno charakterystyka sprężysta jak i dopuszczalne obciążenie łącznika zależy nie tylko od materiału, ale i jego ukształtowania. Guma jest materiałem nieściśliwym. W pracy przyjęto, że jest to materiał Mooneya o potencjale sprężystym [3]:

$$W = \Phi(I_1 - 3) + \Psi(I_2 - 3) + 2C_3(I_1^2 - 9); \quad I_3 = 1 \quad (1)$$

gdzie:

W — potencjał sprężystości,

I_1, I_2, I_3 — niezmienniki tensora odkształcenia,

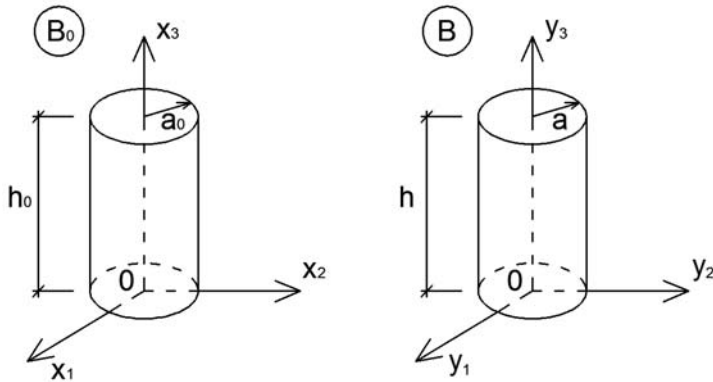
Φ, Ψ, C_3 — stałe materiałowe (por. wzór 18).

2. Określenie składowych tensora naprężenia i odkształcenia oraz wektora przemieszczenia

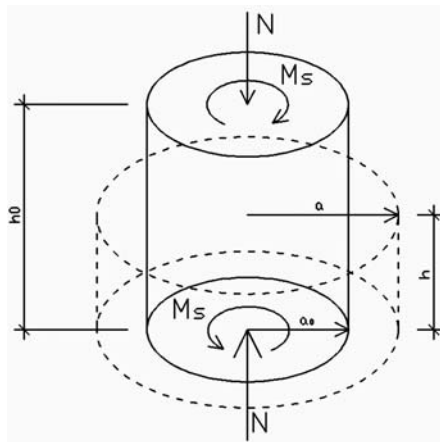
W trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa rozważamy walec kołowy, który w naturalnym, niezdeformowanym stanie — konfiguracja początkowa B_0 ma wymiary: promień a_0

* Katedra Geomechaniki, Budownictwa i Geotechniki, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

i wysokość h_0 (rys. 1, 2). W konfiguracji odkształconej B czyli aktualnej jego wymiary to: promień a i wysokość h .



Rys. 1. Konfiguracje ciała



Rys. 2. Schemat obciążenia i sposób odkształcenia walca

Zgodnie z rysunkiem 1, w B_0 przyjęto układ współrzędnych kartezjańskich $\{x_i\}$ związany ze współrzędnymi cylindrycznymi (konwekcyjnymi) $\{\theta^a\}$ zależnością:

$$\bar{r}: \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{a}{a_0} r \cos\left(\varphi + \frac{\varphi_0}{h_0} z\right) = \lambda r \cos(\varphi + kz) = r_0 \cos \varphi_0 \\ x_2 = \lambda r \sin(\varphi + kz) = r_0 \sin \varphi_0 \\ x_3 = \frac{h}{h_0} z = \chi z = z_0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

gdzie:

a, h, φ — parametry geometryczne w konfiguracji początkowej,

a_0, h_0, φ_0 — parametry geometryczne w konfiguracji odkształconej,
 r, z — współrzędne w walcowym układzie współrzędnych.

Przyjęto tutaj współrzędne konwekcyjne $\theta^1 = r, \theta^2 = \varphi, \theta^3 = z$. Parametry opisujące deformację ciała zmieniają się według zależności:

$$\lambda = \frac{a}{a_0}; \quad k = \frac{\varphi_0}{h_0} > 0; \quad 0 < \chi = \frac{h}{h_0} < 1 \quad (3)$$

W konfiguracji aktualnej B współrzędne kartezjańskie $\{y_i\}$ związane są ze współrzędnymi cylindrycznymi zależnością:

$$\bar{R}: \begin{cases} y_1 = r \cos \varphi \\ y_2 = r \sin \varphi \\ y_3 = z \end{cases} \quad (4)$$

Funkcje $r_0 = \lambda r, \varphi_0 = \varphi + kz, z_0 = \chi z$ opisujące deformację ciała będą wyznaczone z warunku nieściśliwości $I_3 = 1$. Tensory metryczne w konfiguracji początkowej B_0 :

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^s}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial x^s}{\partial \theta^\beta}; \quad g^{\alpha\beta} = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x^s} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial x^s} \quad (5)$$

mają elementy:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 r^2 & \lambda^2 k r^2 \\ 0 & \lambda^2 k r^2 & \lambda^2 k^2 r^2 + \chi^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$g = \det g_{\alpha\beta} = \lambda^4 \chi^2 r^2 \quad (7)$$

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{k}{\chi}\right)^2 + (\lambda r)^{-2} & -\frac{k}{\chi^2} \\ 0 & -\frac{k}{\chi^2} & \chi^{-2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Tensory metryczne w konfiguracji B :

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^s}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial y^s}{\partial \theta^\beta}; \quad G^{\alpha\beta} = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial y^s} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial y^s} \quad (9)$$

mają elementy:

$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (G^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$G = \det G_{\alpha\beta} = r^2 \quad (11)$$

Z warunku nieściśliwości:

$$I_3 = \frac{G}{g} = 1 \quad (12)$$

otrzymujemy równanie wiążące parametry λ, χ :

$$(\lambda^2\chi - 1)(\lambda^2\chi + 1) = 0 \quad (13)$$

i stąd parametr χ wyrażamy przez λ :

$$\chi = \frac{1}{\lambda^2} = \lambda^{-2} \quad (14)$$

W dalszym toku obliczeń zależność (14) wstawiamy do (8):

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^4 k^2 + \lambda^{-2} r^{-2} & -k\lambda^4 \\ 0 & -k\lambda^4 & \lambda^4 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Do wyznaczenia składowych tensora naprężenia musimy znać elementy tensora geometrii:

$$B^{\alpha\beta} = G_{\varphi\psi} (g^{\alpha\beta} g^{\varphi\psi} - g^{\alpha\varphi} g^{\beta\psi}) \quad (16)$$

$$(B^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \lambda^{-4} + \lambda^2 k^2 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 k^2 + (\lambda^2 - \lambda^{-4}) r^{-2} & -k\lambda^2 \\ 0 & -k\lambda^2 & 2\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Obliczenie elementów tensora naprężenia $\tau^{\alpha\beta}$ dla ciała Mooneya:

$$\begin{cases} \tau^{\alpha\beta} = 2(C_1 - 2C_3 I_1) g^{\alpha\beta} + 2C_2 B^{\alpha\beta} + p G^{\alpha\beta} \\ I_1 = g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = \lambda^4 + 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 r^2 \\ \Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1} = 2C_1 \quad \Psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2} = 2C_2 \\ W = 2C_1(I_1 - 3) + 2C_2(I_2 - 3) + 2C_3(I_1^2 - 9) \end{cases} \quad (18)$$

gdzie p — ciśnienie hydrostatyczne.

$$\begin{cases} \tau^{11} = \sigma_{11} = 2C_1\lambda^{-2} + 2C_2(\lambda^2 + \lambda^{-4} + \lambda^2 k^2 r^2) + 4C_3(\lambda^2 + 2\lambda^{-4} + \lambda^2 k^2 r^2) + p \\ r^2 \tau^{22} = \sigma_{22} = 2C_1(\lambda^4 k^2 r^2 + \lambda^{-2}) + 2C_2(\lambda^2 k^2 r^2 + \lambda^2 + \lambda^{-4}) + \\ \quad + 4C_3(\lambda^4 k^2 r^2 + \lambda^{-2})(\lambda^4 + 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 r^2) + p \\ r\tau^{23} = \sigma_{23} = -2C_1 k \lambda^4 r - 2C_2 k \lambda^2 r - 4C_3 k \lambda^4 (\lambda^4 + 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 r^2) r \\ \tau^{12} = \tau^{13} = 0 \\ \tau^{33} = \sigma_{33} = 2C_1 \lambda^4 + 4C_2 \lambda^2 + 4C_3 \lambda^4 (\lambda^4 + 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 r^2) + p \end{cases} \quad (19)$$

W cylindrycznym układzie współrzędnych symbole Christoffela II-go rodzaju są równe:

$$\Gamma_{22}^1 = -r; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}; \quad \text{pozosta e } \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0 \quad (20)$$

Zatem równania równowagi w cylindrycznym układzie współrzędnych są następujące:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau^{11}}{\partial r} + \frac{\partial \tau^{21}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau^{31}}{\partial z} - r\tau^{22} + \frac{1}{r}\tau^{11} = 0 \\ \frac{\partial \tau^{12}}{\partial r} + \frac{\partial \tau^{22}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau^{32}}{\partial z} + \frac{3}{r}\tau^{12} = 0 \\ \frac{\partial \tau^{13}}{\partial r} + \frac{\partial \tau^{23}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau^{33}}{\partial z} + \frac{1}{r}\tau^{13} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Wstawiając (19) do (21) wyznaczamy nieznanne ciśnienie hydrostatyczne:

$$p(r, \varphi, z) = p(r) = C_1 \lambda^4 k^2 r^2 - 2C_2 \lambda^2 k^2 r^2 + C_3 \lambda^8 k^2 (2r^2 + k^2 r^4) + p_0 \quad (22)$$

Stałą p_0 obliczamy z warunku zerowania naprężeń na poboczniczy walca, która jest nieobciążona. Zachodzi zatem:

$$\sigma_{11}|_{r=a} = 0 \quad (23)$$

I stąd:

$$\begin{aligned} p_0 = & -C_1(\lambda^4 k^2 a^2 + 2\lambda^{-2}) - 2C_2(\lambda^2 + \lambda^{-4}) + \\ & -C_3[4\lambda^2 + 8\lambda^{-4} + (4\lambda^2 + 2\lambda^8)k^2 a^2 + \lambda^8 k^4 a^4] \end{aligned} \quad (24)$$

Wstawiając (24) do (12) i (19) otrzymujemy ostateczną postać elementów tensora naprężenia:

$$\begin{cases} \tau^{11} = \sigma_{11} = C_1 \lambda^2 k^2 (r^2 - a^2) + C_3 [4\lambda^2 k^2 (r^2 - a^2) + 2\lambda^8 k^2 (r^2 - a^2) + \lambda^8 k^4 (r^4 - a^4)] \\ r^2 \tau^{22} = \sigma_{22} = C_1 \lambda^4 k^2 (3r^2 - a^2) + \\ \quad + C_3 [4\lambda^2 k^2 (3r^2 - a^2) + 2\lambda^8 k^2 (3r^2 - a^2) + \lambda^8 k^4 (5r^2 - a^2)] \\ r \tau^{23} = \sigma_{23} = -2C_1 \lambda^4 k r - 2C_2 \lambda^2 k r - 4C_3 \lambda^4 (\lambda^4 + 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 r^2) k r \\ \tau^{33} = \sigma_{33} = C_1 [2\lambda^4 - 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 (r^2 - a^2)] + C_2 (2\lambda^2 - 2\lambda^{-4} - 2\lambda^2 k^2 r^2) + \\ \quad + C_3 [4\lambda^8 + 4\lambda^2 - 8\lambda^{-4} - 4\lambda^2 k^2 a^2 + 2\lambda^8 k^2 (3r^2 - a^2) + \lambda^8 k^4 (r^4 - a^4)] \end{cases} \quad (25)$$

Obliczenie zredukowanej siły osiowej ściskającej denka walca:

$$\begin{aligned} N = 2\pi \int_0^a r \sigma_{33} \Big|_{z=0,h} dr &= C_1 \lambda^4 a^2 \left(1 - \lambda^{-6} - \frac{1}{4} k^2 a^2\right) C_2 \lambda^2 a^2 \left(1 - \lambda^{-6} - \frac{1}{2} k^2 a^2\right) + \\ &+ 2C_3 \lambda^2 a^2 \left[\lambda^6 + 1 - 2\lambda^{-6} + \frac{1}{6} (\lambda^6 - 12) k^2 a^2\right] \end{aligned} \quad (26)$$

Obliczenie zredukowanego momentu skręcającego denka walca:

$$M_S = 2\pi \int_0^a r^2 \sigma_{23} \Big|_{z=0,h} dr = \pi \lambda^2 k a^4 \left\{ C_1 \lambda^2 + C_2 + 2C_3 \left[\lambda^2 (\lambda^4 + 2\lambda^{-2}) + \frac{2}{3} \lambda^6 k^2 a^2 \right] \right\} \quad (27)$$

Elementy tensora odkształceń [4] wyznaczamy z zależności:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (G_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \quad (28)$$

$$(\gamma_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 - \lambda^2 r^2 & -\lambda^2 k r^2 \\ 0 & -\lambda^2 k r^2 & 1 - \lambda^2 k^2 r^2 - \lambda^{-4} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Składowe fizyczne tensora odkształcenia wynoszą:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \gamma_{11} = \frac{1 - \lambda^2}{2} \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{r^2} \gamma_{22} = \frac{1}{2} (1 - \lambda^2) \\ \varepsilon_{33} = \gamma_{33} = \frac{1}{2} (1 - \lambda^4 - \lambda^2 k^2 r^2) \\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{r} \gamma_{23} = -\frac{1}{2} \lambda^2 k r \end{cases} \quad (30)$$

Obliczenia wykonano dla związków deformacyjnych:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda r \cos(\varphi + kz) \\ x_2 = \lambda r \sin(\varphi + kz) \\ x_3 = z \end{cases} \quad (31)$$

3. Analiza wpływu stałych fizycznych i geometrycznych na deformację walca kołowego

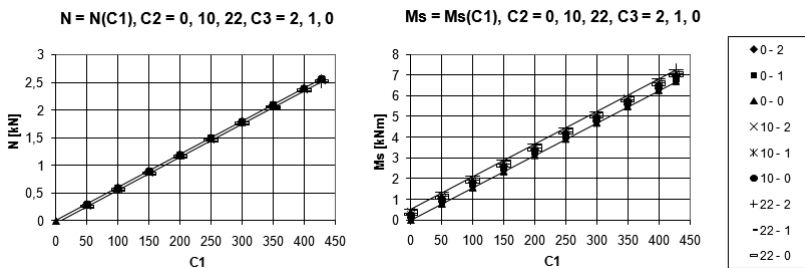
Na podstawie wyprowadzonych wzorów podających naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia oraz zredukowane obciążenie N i M_s przebadano jak stałe materiałowe C_1 , C_2 , C_3 wpływają na zredukowane siły zewnętrzne przy stałych zadanych parametrach geometrycznych. Do obliczeń przyjęto wymiary walca wynoszące: wysokość 13 mm, średnica 300 mm oraz parametry $\lambda = 1,1$ i $k = 6,713$ rad/m odpowiadające pięciostopniowemu skręceniu walca. Stałe materiałowe zmieniano w następujących zakresach:

C_1 — od 0 do 428 kN/m²,

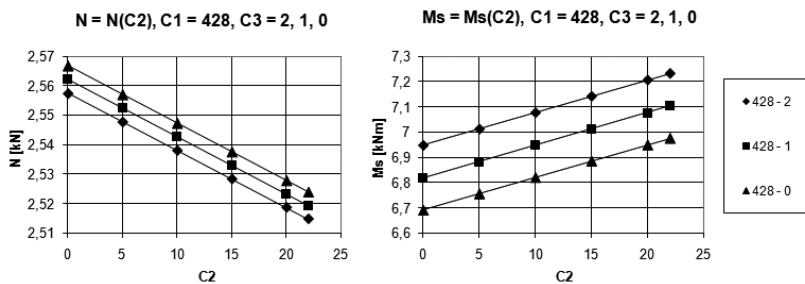
C_2 — od 0 do 22 kN/m²,

C_3 — od 0 do 2 kN/m².

Uzyskane wyniki przedstawiono na rysunkach 3, 4, 5.



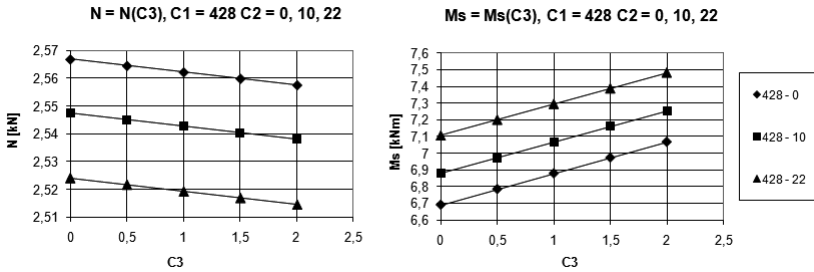
Rys. 3. Wartość zredukowanych sił zewnętrznych w funkcji stałej C_1



Rys. 4. Wartość zredukowanych sił zewnętrznych w funkcji stałej C_2

Z rysunków 3, 4, 5 wynikają następujące wnioski:

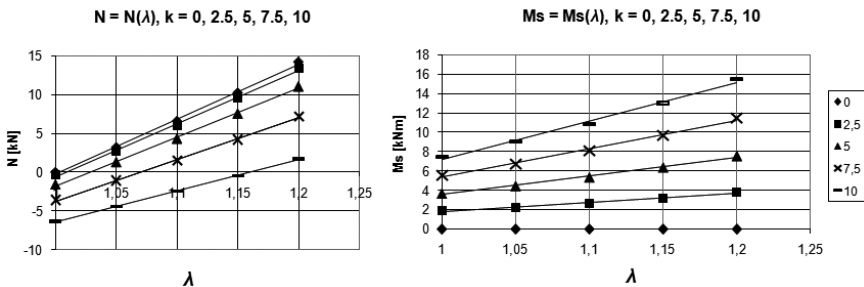
- ze wzrostem stałej C_1 rośnie liniowo siła N , przy czym na jej wartość niewielki wpływ mają stałe C_2 i C_3 ,
- ze wzrostem stałej C_1 rośnie również liniowo moment skręcający M_s przy czym wpływ stałych C_2 i C_3 jest większy i dochodzi do 15%,
- ze wzrostem stałej C_2 przy ustalonych C_1 i C_3 wartość siły osiowej N maleje zaś rośnie M_s ,



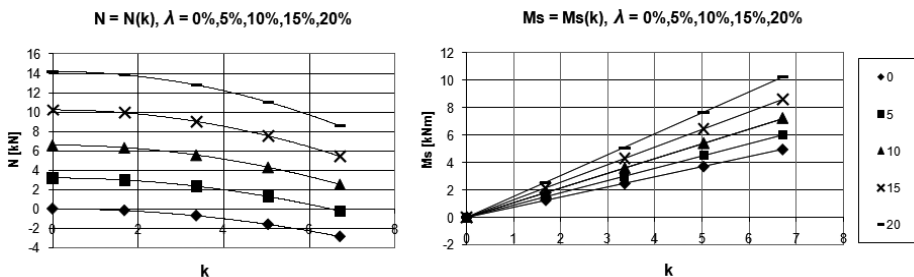
Rys. 5. Wartość zredukowanych sił zewnętrznych w funkcji stałej C_3

- ze wzrostem stałej C_3 przy ustalonych C_1 i C_2 wartość siły osiowej N maleje zaś rośnie wartość momentu skręcającego,
- w praktycznych obliczeniach można przyjmować stałą C_3 równą zero, gdyż jej wpływ na zredukowany układ sił zewnętrznych jest niewielki, a obliczenia znacznie się upraszczają.

W dalszym ciągu przeprowadzono analizę wpływu parametrów λ i k na zredukowany układ sił N i M_s przy ustalonych wartościach stałych materiałowych. Do obliczeń przyjęto podobnie jak poprzednio: $h = 13$ mm, $a = 150$ mm oraz stałe $C_1 = 428$ kN/m², $C_2 = 22$ kN/m² i $C_3 = 2$ kN/m². Parametr λ zmieniano w zakresie od 1 do 2 przy stałym k , zaś w kolejnym wariancie zmieniano k w zakresie od 0 do 30 przy ustalonym parametrze λ z przedziału [1–2]. Wyniki przedstawiają rysunki 6, 7.



Rys. 6. Wartość zredukowanych sił zewnętrznych w funkcji λ



Rys. 7. Wartość zredukowanych sił zewnętrznych w funkcji k

Wynikają z nich następujące wnioski:

- ze wzrostem parametru λ siła osiowa rośnie tym szybciej im mniejsze jest k ,
- ze wzrostem parametru λ moment skręcający również rośnie, jednak wpływ parametru k jest odwrotny, tzn. moment rośnie tym szybciej im większe jest k ,
- ze wzrostem parametru k siła osiowa maleje i to tym bardziej im większe jest λ . Funkcje są krzywoliniowe i nie można ich przybliżać prostymi, nawet dla niewielkich zakresów λ i k .
- ze wzrostem parametru k moment skręcający rośnie. Szybkość przyrostu jest tym większa im większe jest λ . Tym razem jednak funkcje w rozpatrywanym zakresie wartości λ i k można przybliżać prostymi.

4. Podsumowanie

W pracy podano rozwiązanie zamknięte pozwalające na określenie składowych stanu naprężenia, odkształcenia i wektora przemieszczenia przy założonych związkach deformacyjnych dla nieściśliwego walca kołowego. Problem rozwiązano korzystając z równań nieliniowej mechaniki ośrodków odkształcalnych. Na podstawie otrzymanych rezultatów można było przeprowadzić szeroką analizę wpływu stałych fizycznych i geometrycznych na deformację walcowych elementów wykonanych z elastomeru. Praca może znaleźć zastosowanie we wstępnych stadiach projektowania np. gumowych łożysk mostowych czy różnego rodzaju łączników, amortyzatorów itp.

LITERATURA

- [1] *Fung J.C.*: Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN, Warszawa 1969
- [2] *Green A.E., Adkins J.E.*: Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics, Oxford 1980
- [3] *Mooney M.*: A Theory of Large Elastic Deformation, J. Appl. Phys., 11, 1940
- [4] *Paluch M.*: Podstawy teorii sprężystości i plastyczności z przykładami, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2006
- [5] *Paluch M.*: Zastosowanie rachunku tensorowego do wybranych zagadnień geomechaniki, Rozprawy-Monografie, AGH Kraków 2008
- [6] *Pękalak M., Radkowski S.*: Gumowe elementy sprężyste, PWN, Warszawa 1989
- [7] *Rymarz Cz.*: Mechanika ośrodków ciągłych, PWN, Warszawa 1993
- [8] *Wesołowski Z., Woźniak Cz.*: Podstawy nieliniowej teorii sprężystości, PWN Warszawa 1970
- [9] *Zahorski S.*: Doświadczalne badania niektórych własności mechanicznych gumy, Rozprawy Inż., 9, 1961