

*Bogumił Wrań**

ROZWIĄZYWANIE ZADANIA ROZCHÓDZENIA SIĘ FALI NAPRĘŻENIOWEJ W GRUNCIE PRZY ZASTOSOWANIU SFORMUŁOWANIA GALERKINA NIECIĄGŁEGO W CZASIE

1. Wstęp

Badania naukowe nad odpowiedzią gruntu na obciążenie impulsowe są przedmiotem badań zagadnienia rozchodzenia się fali w zagadnieniach sejsmicznych lub wybuchach podziemnych. Takie obciążenie wywołuje w gruncie falę naprężeniową, która propagując się wywołuje lokalne zniszczenie lub lokalne upłynnienia w gruncie. Zagadnienie to podejmuje obecnie wielu badaczy stosując różne metody obliczeniowe. Większość badaczy, do rozwiązania problemu, stosuje metodę elementów skończonych, w której występują dwie główne trudności w uzyskaniu rozwiązania numerycznego. Pierwsza to brak kontroli błędów dyspersji rozwiązania i dyssypacji energii w obszarze i na brzegu. Druga to problem z uzyskaniem kształtów krótkich fal naprężeniowych.

Takie podejście prowadzi do redukcji błędu dyspersji i błędu dyssypacji. Algorytm uwzględnia skończoną wartość energii kinetycznej, przez co zwiększa stabilność procesu rozwiązywania nieciągłości naprężeń [1].

2. Sformułowanie Galerkina rozwiązania nieciągłego w czasie

Aproksymacja nieciągłego rozwiązania w dziedzinie czasu jest określona, przez wartości na końcach odcinków czasowych (por. rys. 1a):

a) przemieszczeń:

$$\mathbf{u}_k^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{u}^h(t_k + \varepsilon); \quad \mathbf{u}_k^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \mathbf{u}^h(t_k - \varepsilon) \quad (1a)$$

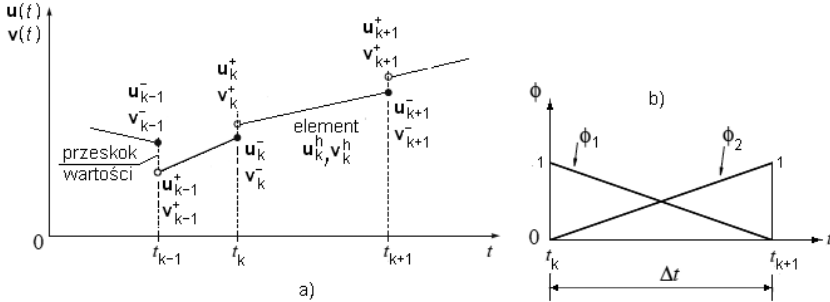
* Zakład Współdziałania Budowli z Podłożem, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska, Kraków

b) prędkości:

$$v_k^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v^h(t_k + \varepsilon); \quad v_k^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} v^h(t_k - \varepsilon) \quad (1b)$$

c) funkcji wagowej:

$$w_k^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} w^h(t_k + \varepsilon); \quad w_k^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} w^h(t_k - \varepsilon) \quad (1c)$$



Rys. 1. Aproxymacja nieciągłości w czasie:
 a) nieciągłość wektorów \mathbf{u} i \mathbf{v} , b) funkcje kształtu w czasie

Wartość przeskoku w chwili czasowej nieciągłości jest różnicą wartości lewo i prawostronnej:

$$\|\mathbf{u}_k\| = \mathbf{u}_k^+ - \mathbf{u}_k^-; \quad \|\mathbf{v}_k\| = \mathbf{v}_k^+ - \mathbf{v}_k^-; \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

Aproxymacja pola przemieszczeń i prędkości w czasie wynosi (por. rys. 1):

$$\mathbf{u}^h(t) = \phi_1(t)\mathbf{u}_1 + \phi_2(t)\mathbf{u}_2, \quad \text{aproxymacja przemieszczeń} \quad (3a)$$

$$\mathbf{v}^h(t) = \phi_1(t)\mathbf{v}_1 + \phi_2(t)\mathbf{v}_2, \quad \text{aproxymacja prędkości} \quad (3b)$$

gdzie (rys. 1b) [4]:

$$\phi_1(t) = \frac{t_{k+1} - t}{\Delta t_k} \quad (4a)$$

$$\phi_2(t) = \frac{t - t_k}{\Delta t_k} \quad (4b)$$

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$$

$\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$ rozwiązanie w chwili czasowej t_k ,
 $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2$ rozwiązanie w chwili czasowej t_{k+1} ,

Wektor residuów ważonych w ujęciu elementów skończonych w dziedzinie czasu wynosi [2, 3]:

$$\mathbf{R}_k = \int_{I_k} \mathbf{w}_v^h (\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}^h + \mathbf{K}\mathbf{u}^h - \mathbf{f}) dt + \int_{I_k} d\mathbf{w}_v^h \mathbf{K}(\dot{\mathbf{u}}^h - \mathbf{v}^h) dt + d\mathbf{w}_u^h(t_k^+) \mathbf{K}[\mathbf{u}^h(t_k)] + \mathbf{w}_v^h(t_k^+) \mathbf{M}[\mathbf{v}^h(t_k)] = 0 \quad (5)$$

gdzie:

$I_k = (t_k, t_{k+1})$ — odcinek całkowania po czasie,

\mathbf{M} — macierz mas gruntu,

\mathbf{K} — macierz sztywności gruntu,

\mathbf{f} — wektor obciążeń węzłowych oraz wektor statycznie równoważnych obciążeń powierzchniowych na obszarach i na brzegach elementów.

Zależność (5) zawiera:

$$\int_{I_k} \mathbf{w}_v^h (\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}^h + \mathbf{K}\mathbf{u}^h - \mathbf{f}) dt \text{ — równanie ruchu,}$$

$$\int_{I_k} d\mathbf{w}_v^h \mathbf{K}(\dot{\mathbf{u}}^h - \mathbf{v}^h) dt \text{ — definicję prędkości,}$$

$$d\mathbf{w}_u^h(t_k^+) \mathbf{K}[\mathbf{u}^h(t_k)] \text{ — ciągłość przemieszczeń}$$

$$\mathbf{w}_v^h(t_k^+) \mathbf{M}[\mathbf{v}^h(t_k)] \text{ — ciągłość prędkości.}$$

Schemat całkowania po czasie z liniowymi funkcjami kształtu jest bezwarunkowo zbieżny rzędu trzeciego [4].

3. Rozwiązanie numeryczne

Podstawiając aproksymacje w dziedzinie czasu (3) do równania na residuum (5) otrzymamy równanie macierzowe na wartości przemieszczeń \mathbf{u}_1 i prędkości w chwili czasowej t_k^+ oraz wartości $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2$ w chwili czasowej t_{k+1}^- :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{K} & \frac{1}{2} \mathbf{K} & -\frac{\Delta t_k}{3} \mathbf{K} & \frac{\Delta t_k}{6} \mathbf{K} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{K} & \frac{1}{2} \mathbf{K} & -\frac{\Delta t_k}{6} \mathbf{K} & -\frac{\Delta t_k}{3} \mathbf{K} \\ \frac{\Delta t_k}{3} \mathbf{K} & \frac{\Delta t_k}{6} \mathbf{K} & \frac{1}{2} \mathbf{M} & \frac{1}{2} \mathbf{M} \\ \frac{\Delta t_k}{6} \mathbf{K} & \frac{\Delta t_k}{3} \mathbf{K} & -\frac{1}{2} \mathbf{M} & \frac{1}{2} \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}\mathbf{u}_1^- \\ 0 \\ \mathbf{f}_1 + \mathbf{M}\mathbf{v}_1^- \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

gdzie:

$\mathbf{u}_1^-, \mathbf{v}_1^-$ — wartości przemieszczeń i prędkości w chwili czasowej t_k^-

$$\mathbf{f}_1 = \int_{I_k} \phi_1(t) \mathbf{f} dt \quad \mathbf{f}_2 = \int_{I_k} \phi_2(t) \mathbf{f} dt$$

Wymiar macierzy problemu (6) jest czterokrotnie większy od liczby stopni swobody równania ruchu. W celu skrócenia czasu obliczeń, zastosowano metodę iteracyjną predyktor-korektor [5]. Równanie (6) zostaje zredukowane do postaci:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & 0 & -\frac{\Delta t_k}{6} \mathbf{K} & \frac{\Delta t_k}{6} \mathbf{K} \\ 0 & \mathbf{K} & -\frac{\Delta t_k}{2} \mathbf{K} & -\frac{\Delta t_k}{2} \mathbf{K} \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^* & \frac{2}{3} \mathbf{M} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \Delta t_k^2 \mathbf{M} & \mathbf{M}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{K} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \frac{1}{6} \Delta t_k^2 \mathbf{K}$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{6} (\mathbf{f}_1 + \mathbf{M} \mathbf{v}_1^-) - \frac{1}{3} \mathbf{f}_1 - \frac{2}{3} \Delta t_k \mathbf{K} \mathbf{u}_1^-$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{M} \mathbf{v}_1^- - \Delta t_k \mathbf{K} \mathbf{u}_1^-$$

Algorytm obliczeń

- 1) Czytanie danych, wartości początkowe:

$$\mathbf{u}_1^- = \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_1^- = \mathbf{v}_0, t = 0$$

- 2) Obliczanie efektywnej macierzy mas oraz rozkład na macierze trójkątne:

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \frac{1}{6} \Delta t_k^2 \mathbf{K}$$

- 3) Całkowanie po czasie:

- a) Obliczanie efektywnych wektorów obciążenia:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{6} (\mathbf{f}_1 + \mathbf{M} \mathbf{v}_1^-) - \frac{1}{3} \mathbf{f}_1 - \frac{2}{3} \Delta t_k \mathbf{K} \mathbf{u}_1^-$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{M} \mathbf{v}_1^- - \Delta t_k \mathbf{K} \mathbf{u}_1^-$$

- b) Predyktor:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^-, \quad n = 0$$

- c) Korektor, iteracja Gaussa-Seidla dla kroku czasowego Δt_k :

$$\mathbf{M} \mathbf{v}_2^{n+1} = \mathbf{f}_2 - \frac{1}{3} \Delta t_k^2 \mathbf{K} \mathbf{v}_1^n$$

$$\mathbf{M} \mathbf{v}_1^{n+1} = \mathbf{f}_1 - \frac{2}{3} \mathbf{M} \mathbf{v}_2^{n+1}$$

$$\text{if } \bar{\varepsilon} > \varepsilon \quad \text{then goto c)}$$

d) Końcowe wyniki kroku czasowego Δt_k :

$$\mathbf{v}_1^- \leftarrow \mathbf{v}_2$$

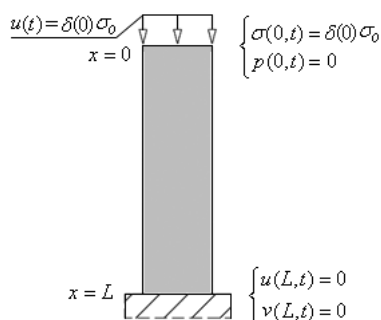
$$\mathbf{u}_1^- \leftarrow \mathbf{u}_1^- + \frac{\Delta t_k (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)}{2}$$

$$t \leftarrow t + \Delta t_{k+1}$$

if $t > T$ then goto a) else terminate

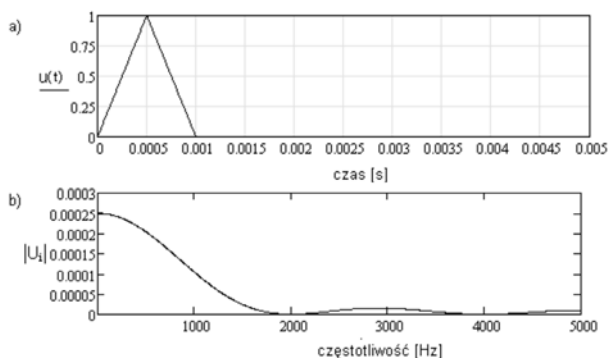
4. Przykład

Rozważane jest zadanie propagacji fali sprężystej w kolumnie Biota (por. rys. 2) od wymuszenia impulsowego. Dane kolumny: $L = 10$ m, $\sigma_0 = 100$ kPa, żwir zagęszczony: $\rho_s = 2,65$ t/m³, $\rho_s = 1,0$ t/m³, $E = 160$ MPa, $n = 0,33$, $k = 0,01$ m/s. Prędkość fali podłużnej $c = (E/\rho)^{0,5} \approx 246$ m/s.

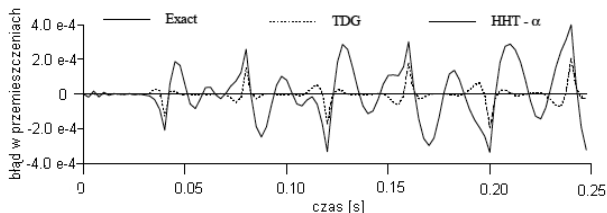


Rys. 2. Kolumna Biota

Na rysunku 3 przedstawiono charakterystykę obciążenia impulsowego przyłożonego na górnym poziomie kolumny. Na rysunku 4 porównano błąd bezwzględny rozwiązania zadania w przemieszczeniach, gdzie TDG (*time-discontinuous Galerkin*) jest rozwiązaniem aktualnie proponowanym, HHT- α to rozwiązanie metodą Hilbert-Hughes-Taylor [6].



Rys. 3. Charakterystyka obciążenia impulsowego



Rys. 4. Błąd bezwzględny przemieszczeń

5. Wnioski

Artykuł poświęcony jest prezentacji metody numerycznej obliczania propagacji fali naprężeniowej w ośrodku gruntowym. Do rozwiązania zadania zaproponowano nowe podejście polegające na sformułowaniu Galerkin w aproksymacji całkowania równania ruchu w czasie. Efektywność metody przedstawiono na przykładzie kolumny Biota, porównując proponowane rozwiązanie z metodą obecnie najczęściej stosowaną HHT- α .

Na rysunku 4 pokazano, że proponowana metoda wnosi mniejsze wartości błędów numerycznych, niż obecnie stosowana metoda HHT- α , w wielu dużych systemach metody elementów skończonych.

LITERATURA

- [1] *Kunthong P., Thompson L.L.*: An Efficient Solver for the High-order Accurate Time-discontinuous Galerkin (TDG) Method for Second-order Hyperbolic Systems. *Finite Elements in Analysis and Design* 41, 2005, p. 729–762
- [2] *Chien C.C., Tong-Yue Wu*: A Particular Integral BEM/Time-discontinuous FEM Methodology for Solving 2-D Elastodynamic Problems. *International Journal of Solids and Structures* 38, 2001, p. 289–306
- [3] *Chien C.C., Yang C.S., Tang J.H.*: Three-dimensional Transient Elastodynamic Analysis by a Space and Time-discontinuous Galerkin Finite Element Method. *Finite Elements in Analysis and Design* 39, 2003, p. 561–580
- [4] *Hulbert G.*: A Unified Set of Single-step Asymptotic Annihilation Algorithms for Structural Dynamics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 113, 1994, p. 1–9
- [5] *Li, X.D., Wiberg, N.E.*: Structural Dynamic Analysis by a Time-discontinuous Galerkin Finite Element Method. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 39, 1996, p. 2131–2152
- [6] *Hilber H.M., Hughes T.J.R., Taylor R.L.*: Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 5, 1977, p. 283–292