Górnictwo i Geoinżynieria • Rok 35 • Zeszyt 1 • 2011

*Zbigniew Burtan**

GEOMECHANICZNY MODEL OŚRODKA TRANSWERSALNIE IZOTROPOWEGO JAKO UPROSZCZONY MODEL GÓROTWORU UWARSTWIONEGO**

1. Wprowadzenie

Charakterystyczne dla metod analitycznych opisujących budowę ośrodka skalnego jest operowanie pewnymi modelami górotworu. Rzeczywiste własności górotworu, składającego się z wielu warstw różniących się wartościami parametrów odkształceniowych, przemawiają za stosowaniem w pracach analitycznych, zajmujących się oddziaływaniem eksplotacji górniczej geomechanicznego modelu górotworu uwarstwionego. Zasady tworzenia takiego modelu, pozwalającego na podstawie odpowiednich warunków brzegowych na określenie składowych tensora naprężenia i wektora przemieszczenia w dowolnym punkcie analizowanego ośrodka skalnego, zalegającego poniżej prowadzonej lub dokonanej eksploatacji, przedstawiono w pracach [1, 6]. Ponieważ złożoność opisujących ten model formuł uniemożliwia uzyskanie zamkniętych wyrażeń analitycznych oraz z uwagi na fakt, że często w praktyce ruchowej nie dysponujemy wiedzą o wszystkich parametrach odkształceniowych warstw, do celów tworzenia prognoz kopalnianych zamiast ośrodka wielowarstwowego można zastosować uproszczony model górotworu uwarstwionego z wykorzystaniem ośrodka transwersalnie izotropowego.

2. Geomechaniczny model ośrodka transwersalnie izotropowego jako uproszczony model górotworu uwarstwionego

Przy tworzeniu geomechanicznego modelu górotworu uwarstwionego (rys. 1) przyjęto następujące założenia [1, 6]:

1) konkretny element eksploatacji (front eksplotacyjny, zaszłość eksploatacyjna) modelowano odpowiednim rozkładem naprężeń lub przemieszczeń;

* AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii

** Artykuł zrealizowano w ramach prac statutowych AGH nr 11.11.100.281

2) poniżej zalega n warstw (n = 1, 2, 3, ..., j), stanowiących jednorodne, izotropowe i ograniczone pasma sprężyste o parametrach: h_j – grubość, E_j, ν_j – własności odkształceniowe;
3) zalegające poniżej poziomu z_j utwory skalne, modelowano jednorodną i izotropową półpłaszczyzną sprężystą o parametrach E_∞, ν_∞;
4) przyjęto: poślizgowy (brak tarcia i kohezji), kohezyjny oraz tarciowy rodzaj współpracy kontaktujących się ze sobą warstw;
5) powyższy układ rozpatrywano w płaskim stanie odkształcenia.

Proponowane uproszczenie polega na zastąpieniu pakietu n warstw, zalegających poniżej rozpatrywanych elementów eksploatacyjnych, układem składającym się z jednej warstwy transwersalnie izotropowej oraz jednorodnej, sprężystej półpłaszczyzny (rys. 1). Przy ograniczeniu zatem liczby warstw do jednej, z $(4n + 2)$ do sześciu zmniejsza się liczba równań algebraicznych, niezbędnych do wyznaczenia stałych całkowania.

Zakładając, że własności każdej z warstw analizowanego pakietu opisują wielkości: E_j, ν_j, G_j oraz h_j, można stwierdzić, że parametry charakteryzujące warstwę transwersalnie-izotropową mają postać [4]

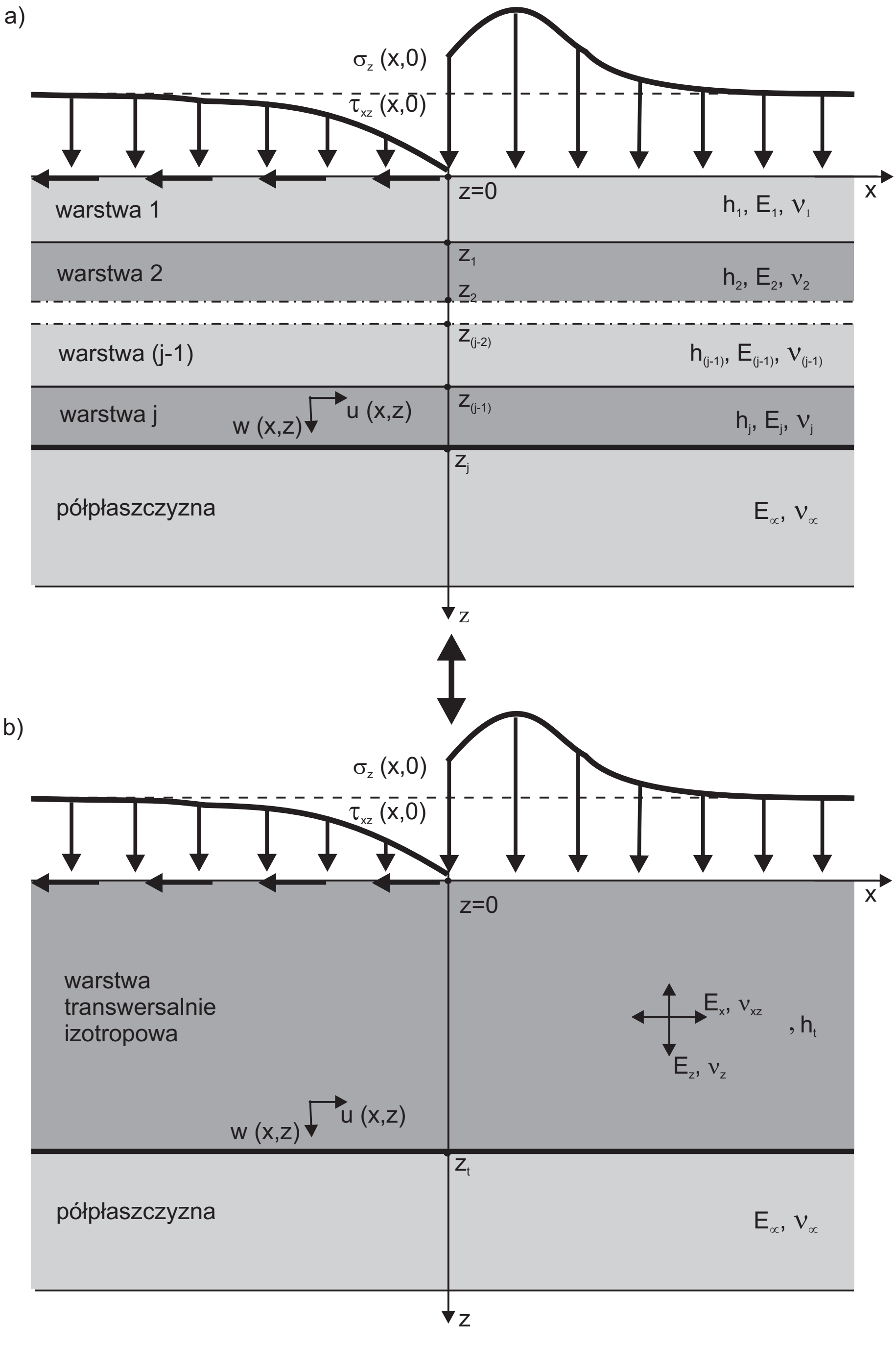
$$\nu_x = \frac{\sum \frac{\varphi_j \nu_j E_j}{1-\nu_j^2}}{\sum \frac{\varphi_j E_j}{1-\nu_j^2}} \qquad \nu_{xz} = (1-\nu_x)\sum \frac{\varphi_j \nu_j}{1-\nu_j} \tag{1}$$

$$E_x = (1-\nu_x^2)\sum \frac{\varphi_j E_j}{1-\nu_j} \qquad E_z = \frac{1}{\sum \frac{\varphi_j}{E_j}\left(1-\frac{2\nu_z^2}{1-\nu_j}\right)+\frac{2\nu_{xz}^2}{(1-\nu_x)E_x}} \tag{2}$$

$$G_x = \frac{E_x}{2(1+\nu_x)} = \sum \varphi_j G_j \qquad G_z = \frac{1}{\sum \frac{\varphi_j}{G_j}} \tag{3}$$

gdzie:

$$\varphi_j = \frac{h_j}{\sum h_j} \tag{4}$$



Rys. 1. Geomechaniczne modele:
a) górotworu uwarstwionego; b) ośrodka transwersalnie izotropowego

W przypadku, w którym współczynniki Poissone'a dla wszystkich warstw są równe (współczynnik ten dla warstw karbońskich jest porównywalny i wynosi średnio $\nu \cong 0{,}27$), ekwiwalentne moduły sprężystości określają następujące formuły:

$$\nu_x = \nu_{xz} = \nu \tag{5}$$

$$E_x = \sum \varphi_j E_j$$
$$E_z = \frac{(1-\nu)E_x}{(1+\nu)(1-2\nu)E_x \sum \dfrac{\varphi_j}{E_j} + 2\nu^2} \tag{6}$$

$$G_x = \frac{\sum \varphi_j E_j}{2(1+\nu)}$$
$$G_z = \frac{1}{2(1+\nu)\sum \dfrac{\varphi_j}{E_j}} \tag{7}$$

Zakładając płaski stan odkształcenia i traktując warstwę transwersalnie izotropową jako ośrodek sprężysty, równanie biharmoniczne definiujące stan naprężenia w warstwie transwersalnie izotropowej ma postać [3]:

$$S_{22}\frac{\partial^4 F_t(x,z)}{\partial x^4} + (2S_{12} + S_{66})\frac{\partial^4 F_t(x,z)}{\partial x^2 \partial z^2} + S_{11}\frac{\partial^4 F_t(x,z)}{\partial z^4} = 0 \tag{8}$$

gdzie:

$F_t(x,z)$ — funkcja naprężeń definiująca składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia w warstwie transwersalnie izotropowej.

$$S_{11} = \frac{1-\nu_x^2}{E_x}$$
$$S_{22} = \frac{1-\nu_{xz}^2}{E_z}$$
$$S_{12} = -\frac{\nu_x + \nu_x \nu_{xz}}{E_x} \tag{9}$$
$$S_{66} = \frac{1}{G_x}$$

W celu rozwiązania równania biharmonicznego i wyznaczenia funkcji naprężeń $F_t(x,z)$ wykorzystano metodę zespolonej transformacji całkowej Fouriera [5], według której transformaty proste funkcji definiuje wzór:

$$\overline{\Phi}(\alpha,z) \overset{df}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,z) e^{-i\alpha x} dx \tag{10}$$

a transformaty odwrotne określa formuła:

$$\Phi(x,z) \overset{df}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi}(\alpha,z) e^{i\alpha x} dx \tag{11}$$

Transformatę funkcji naprężeń w warstwie transwersalnie izotropowej przedstawia zależność:

$$\begin{aligned} \overline{F}_t(\alpha,z) = A_t \cosh(\alpha\beta_1 z) + B_t \cosh(\alpha\beta_2 z) + \\ + C_t \sinh(\alpha\beta_1 z) + D_t \sinh(\alpha\beta_2 z) \end{aligned} \tag{12}$$

Zaś transformatę funkcji naprężeń dla półpłaszczyzny zalegającej pod warstwą transwersalnie izotropową przedstawia związek:

$$\overline{F}_\infty(\alpha,z) = (C_\infty + D_\infty z) e^{-\alpha z} \tag{13}$$

gdzie:

$A_t, B_t, C_t, D_t, C_\infty, D_\infty$ — stałe całkowania wyznaczane z odpowiednich warunków brzegowych,

β_1, β_2 — zespolone pierwiastki równania:

$$S_{22}\beta^4 + (2S_{12} + S_{66})\beta^2 + S_{11} = 0 \tag{14}$$

$$\beta_k = \sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} - 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{22}}} \tag{15}$$

Transformaty składowych tensora naprężenia i wektora przemieszczenia w warstwie transwersalnie izotropowej oraz zalegającej poniżej półpłaszczyźnie definiują wzory:

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_x^{(t)}(\alpha,z) = \dfrac{\partial^2 \overline{F}_t(\alpha,z)}{\partial z^2} \\ \overline{\sigma}_z^{(t)}(\alpha,z) = -\alpha 2 \overline{F}_t(\alpha,z) \\ \overline{\tau}_{xz}^{(t)}(\alpha,z) = i\alpha \dfrac{\partial \overline{F}_t(\alpha,z)}{\partial z} \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \overline{u}^{(t)}(\alpha,z)=\dfrac{i}{2G_t\alpha}\left[(1-\nu_t)\dfrac{\partial^2\overline{F}_t(\alpha,z)}{\partial z^2}+\nu_t\alpha^2\overline{F}_t(\alpha,z)\right] \\ \overline{w}^{(t)}(\alpha,z)=\dfrac{1}{2G_t\alpha^2}\left[(1-\nu_t)\dfrac{\partial^3\overline{F}_j(\alpha,z)}{\partial z^3}+\alpha^2(\nu_t-2)\dfrac{\partial\overline{F}_t(\alpha,z)}{\partial z}\right] \end{cases} \tag{17}$$

Odpowiednie pochodne transformaty funkcji naprężeń mają postać:

a) dla warstwy transwersalnie izotropowej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overline{F}_t(\alpha,z)}{\partial z} &= A_t\alpha\beta_1\sinh(\alpha\beta_1 z)+B_t\alpha\beta_2\sinh(\alpha\beta_2 z)+ \\ &\quad +C_t\alpha\beta_1\cosh(\alpha\beta_1 z)+D_t\alpha\beta_2\cosh(\alpha\beta_2 z) \\ \frac{\partial^2\overline{F}_t(\alpha,z)}{\partial z^2} &= A_t\alpha^2\beta_1^2\cosh(\alpha\beta_1 z)+B_t\alpha^2\beta_2^2\cosh(\alpha\beta_2 z)+ \\ &\quad +C_t\alpha^2\beta_1^2\sinh(\alpha\beta_1 z)+D_t\alpha^2\beta_2^2\sinh(\alpha\beta_2 z) \\ \frac{\partial^3\overline{F}_t(\alpha,z)}{\partial z^3} &= A_t\alpha^3\beta_1^3\sinh(\alpha\beta_1 z)+B_t\alpha^3\beta_2^3\sinh(\alpha\beta_2 z)+ \\ &\quad +C_t\alpha^3\beta_1^3\cosh(\alpha\beta_1 z)+D_t\alpha^3\beta_2^3\cosh(\alpha\beta_2 z) \end{aligned} \tag{18}$$

b) dla półpłaszczyzny:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overline{F}_\infty(\alpha,z)}{\partial z} &= -C_{\infty j}\alpha e^{-\alpha z}+D_\infty(1-\alpha z)e^{-\alpha z} \\ \frac{\partial^2\overline{F}_\infty(\alpha,z)}{\partial z^2} &= C_\infty\alpha^2 e^{-\alpha z}+D_{\infty j}\alpha(2-\alpha z)e^{-\alpha z} \\ \frac{\partial^3\overline{F}_\infty(\alpha,z)}{\partial z^3} &= -C_\infty\alpha^3 e^{-\alpha z}+D_\infty\alpha^2(3-\alpha z)e^{-\alpha z} \end{aligned} \tag{19}$$

Po podstawieniu powyższych wyrażeń do ogólnych wzorów na transformaty składowych tensora naprężenia i wektora przemieszczenia formuły tych transformat opisują wyrażenia:

a) dla warstwy transwersalnie izotropowej:

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_x^{(t)}(\alpha,z)=\alpha^2[A_t\beta_1^2\cosh(\alpha\beta_1 z)+B_t\beta_2^2\cosh(\alpha\beta_2 z)+ \\ \qquad +C_t\beta_1^2\sinh(\alpha\beta_1 z)+D_t\beta_2^2\sinh(\alpha\beta_2 z)] \\ \overline{\sigma}_z^{(t)}(\alpha,z)=-\alpha^2[A_t\cosh(\alpha\beta_1 z)+B_t\cosh(\alpha\beta_2 z)+ \\ \qquad +C_t\sinh(\alpha\beta_1 z)+D_t\sinh(\alpha\beta_2 z)] \\ \overline{\tau}_{xz}^{(t)}(\alpha,z)=i\alpha^2[A_t\beta_1\sinh(\alpha\beta_1 z)+B_t\beta_2\sinh(\alpha\beta_2 z)+ \\ \qquad +C_t\beta_1\cosh(\alpha\beta_1 z)+D_t\beta_2\cosh(\alpha\beta_2 z)] \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \overline{u}^{(t)}(\alpha, z) = i\alpha[A_t R_1 \cosh(\alpha\beta_1 z) + B_t R_2 \cosh(\alpha\beta_2 z) + \\ \qquad + C_t R_1 \sinh(\alpha\beta_1 z) + D_t R_2 \sinh(\alpha\beta_2 z)) \\ \overline{w}^{(t)}(\alpha, z) = \alpha[A_t Q_1 \sinh(\alpha\beta_1 z) + B_t Q_2 \sinh(\alpha\beta_2 z) + \\ \qquad + C_t Q_1 \cosh(\alpha\beta_1 z) + D_t Q_2 \cosh(\alpha\beta_2 z)) \end{cases} \tag{21}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} R_k &= S_{22}\beta_k^2 - S_{12} \\ Q_k &= S_{12}\beta_k - \frac{S_{11}}{\beta_k} \\ k &= 1,2 \end{aligned} \tag{22}$$

b) dla półpłaszczyzny:

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_x^{(\infty)}(\alpha, z) = [C_\infty \alpha^2 - D_\infty \alpha(2 - \alpha z)]e^{-\alpha z} \\ \overline{\sigma}_z^{(\infty)}(\alpha, z) = -\alpha^2 (C_\infty + D_\infty z)e^{-\alpha z} \\ \overline{\tau}_{xz}^{(\infty)}(\alpha, z) = i\alpha[-C_\infty \alpha + D_\infty (1 - \alpha z)]e^{-\alpha z} \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \overline{u}^{(\infty)}(\alpha, z) = \dfrac{i}{2G_\infty}[C_\infty \alpha - D_\infty (2 - 2\nu_\infty - \alpha z)]e^{-\alpha z} \\ \overline{w}^{(\infty)}(\alpha, z) = \dfrac{1}{2G_\infty}[C_\infty \alpha - D_\infty (1 - 2\nu_\infty - \alpha z)]e^{-\alpha z} \end{cases} \tag{24}$$

Warunki brzegowe, definiujące problem i służące do wyznaczenia stałych całkowania, mają taką samą postać matematyczną oraz znaczenie fizyczne jak w przypadku pakietu warstw izotropowych [1,6]:

a) dla $z = 0$ – opisują stan naprężenia lub przemieszczenia na poziomie elementu eksploatacji:

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_z^{(0)}(\alpha) = \overline{\sigma}_z^{(t)}(\alpha, 0) \\ \overline{\tau}_{xz}^{(0)}(\alpha) = \overline{\tau}_{xz}^{(t)}(\alpha, 0) \end{cases} \tag{25}$$

lub

$$\begin{cases} \overline{w}^{(0)}(\alpha) = \overline{w}^{(t)}(\alpha, 0) \\ \overline{u}^{(0)}(\alpha) = \overline{u}^{(t)}(\alpha, 0) \end{cases} \tag{26}$$

b) na kontakcie warstwy transwersalnie izotropowej i półpłaszczyzny $z = z_t$ – określają rodzaj kontaktu oraz stan naprężenia i przemieszczenia;

Dla wszystkich rodzajów kontaktu spełnione są równania:

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_z^{(t)}(\alpha, z_t) = \overline{\sigma}_z^{(\infty)}(\alpha, z_t) \\ \overline{w}^{t}(\alpha, z_t) = \overline{w}^{(\infty)}(\alpha, z_t) \end{cases} \tag{27}$$

— w wariancie I charakteryzującym kontakt kohezyjny, warunki brzegowe mają postać:

$$\begin{cases} \overline{\tau}_{xz}^{(t)}(\alpha, z_t) = \overline{\tau}_{xz}^{(\infty)}(\alpha, z_t) \\ \overline{u}_z^{(t)}(\alpha, z_t) = \overline{u}_z^{(\infty)}(\alpha, z_t) \end{cases} \tag{28}$$

— w wariancie II, gdy na kontakcie nie występują siły spójności i siły tarcia zachodzą następujące relacje:

$$\begin{cases} \overline{\tau}_{xz}^{(t)}(\alpha, z_t) = 0 \\ \overline{\tau}_{xz}^{(\infty)}(\alpha, z_t) = 0 \end{cases} \tag{29}$$

— w wariancie III, gdy na kontakcie występują siły tarcia, zachodzą zależności:

$$\begin{cases} \overline{\tau}_{xz}^{(t)}(\alpha, z_t) = \mu\overline{\sigma}_z^{(t)}(\alpha, z_t) \\ \overline{\tau}_{xz}^{(t)}(\alpha, z_t) = \overline{\tau}_{xz}^{(\infty)}(\alpha, z_t) \end{cases} \tag{30}$$

gdzie: μ – współczynnik tarcia

c) dla półpłaszczyzny: $z \Rightarrow \infty$, definiują naprężenie pionowe:

$$\overline{\sigma}_z^{(\infty)} = 0 \tag{31}$$

Istnieje możliwość dowolnego formułowania warunków brzegowych na poziomie zaszłości, przez modelowanie odpowiednimi rozkładami naprężeń lub przemieszczeń. Równania algebraiczne wynikające z tych warunków mają następującą postać:

$$\begin{cases} -\alpha^2(A_t + B_t) = \overline{\sigma}_z^{(0)}(\alpha) \\ i\alpha^2(C_t + D_t) = \overline{\tau}_z^{(0)}(\alpha) \end{cases} \tag{32}$$

lub

$$\begin{cases} i\alpha(A_t R_1 + B_t R_2) = \overline{u}^{(0)}(\alpha) \\ \alpha(C_t Q_1 + D_t Q_2) = \overline{w}^{(0)}(\alpha) \end{cases} \tag{33}$$

Bez względu na rodzaj współpracy między warstwą transwersalnie izotropową a półpłaszczyzną, na ich kontakcie spełnione będą równania ciągłości naprężeń i przemieszczeń pionowych:

$$\begin{cases} A_t \cosh(\alpha\beta_1 z_t) + B_t \cosh(\alpha\beta_2 z_t) + C_t \sinh(\alpha\beta_1 z_t) + \\ + D_t \sinh(\alpha\beta_2 z_t) = (C_\infty + D_\infty z_t) e^{-\alpha z_t} \\ 2G_\infty \alpha [A_t Q_1 \sinh(\alpha\beta_1 z_t) + B_t Q_2 \sinh(\alpha\beta_2 z_t) + \\ + C_t Q_1 \cosh(\alpha\beta_1 z_t) + D_t Q_2 \cosh(\alpha\beta_2 z_t) = \\ = [C_\infty \alpha + D_\infty (1 - 2\nu_\infty + \alpha z_t)] e^{-\alpha z_t} \end{cases} \tag{34}$$

W wariancie I, gdy na kontakcie występują siły spójności, zachodzi ciągłość naprężeń stycznych i przemieszczeń poziomych, wynikiem czego są następujące równania:

$$\begin{cases} \alpha[A_t \beta_1 \sinh(\alpha\beta_1 z_t) + B_t \beta_2 \sinh(\alpha\beta_2 z_t) + C_t \beta_1 \cosh(\alpha\beta_1 z_t) + \\ + D_t \beta_2 \cosh(\alpha\beta_2 z_t)] = [-C_\infty \alpha + D_\infty (1 - \alpha z_t)] e^{-\alpha z_t} \\ 2G_\infty \alpha [A_t R_1 \cosh(\alpha\beta_1 z_t) + B_t R_2 \cosh(\alpha\beta_2 z_t) + C_t R_1 \sinh(\alpha\beta_1 z_t) + \\ + D_t R_2 \sinh(\alpha\beta_2 z_t)] = [C_\infty \alpha + D_\infty (2 - 2\nu_\infty - \alpha z_t)] e^{-\alpha z_t} \end{cases} \tag{35}$$

W przypadku, charakteryzującego wariant II, kontaktu poślizgowego nie występują naprężenia styczne, co opisują równania:

$$\begin{cases} A_t \beta_1 \sinh(\alpha\beta_1 z_t) + B_t \beta_2 \sinh(\alpha\beta_2 z_t) + C_t \beta_1 \cosh(\alpha\beta_1 z_t) + D_t \beta_2 \cosh(\alpha\beta_2 z_t) = 0 \\ [-C_\infty \alpha + D_\infty (1 - \alpha z_t)] e^{-\alpha z_t} = 0 \end{cases} \tag{36}$$

Dla wariantu III, gdy na kontakcie występują siły tarcia, zachodzą zależności:

$$\begin{cases} i[A_t \beta_1 \sinh(\alpha\beta_1 z_t) + B_t \beta_2 \sinh(\alpha\beta_2 z_t) + C_t \beta_1 \cosh(\alpha\beta_1 z_t) + D_t \beta_2 \cosh(\alpha\beta_2 z_t) = \\ = -\mu [A_t \cosh(\alpha\beta_1 z_t) + B_t \cosh(\alpha\beta_2 z_t) + C_t \sinh(\alpha\beta_1 z_t) + D_t \sinh(\alpha\beta_2 z_t)] \\ \alpha[A_t \beta_1 \sinh(\alpha\beta_1 z_t) + B_t \beta_2 \sinh(\alpha\beta_2 z_t) + C_t \beta_1 \cosh(\alpha\beta_1 z_t) + D_t \beta_2 \cosh(\alpha\beta_2 z_t) = \\ = [-C_\infty \alpha + D_\infty (1 - \alpha z_t)] e^{-\alpha z_t} \end{cases} \tag{37}$$

Formułując układ równań dla dowolnie przyjętych warunków brzegowych, można po wyznaczeniu stałych całkowania, obliczyć transformaty odwrotne składowych tensora naprężenia i wektora przemieszczenia.

Na dowolnym poziomie warstwy transwersalnie izotropowej składowe te określają wzory:

$$\sigma_x^{(t)}(x,z)=\mathrm{Re}\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\alpha^2[A_t\beta_1^2\cosh(\alpha\beta_1 z)+B_t\beta_2^2\cosh(\alpha\beta_2 z)+\right.$$
$$\left.+C_t\beta_1^2\sinh(\alpha\beta_1 z)+D_t\beta_2^2\sinh(\alpha\beta_2 z)]\}e^{i\alpha x}d\alpha\right\rangle$$
$$\sigma_z^{(t)}(x,z)=\mathrm{Re}\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{-\alpha^2[A_t\cosh(\alpha\beta_1 z)+B_t\cosh(\alpha\beta_2 z)+\right.$$
$$\left.+C_t\sinh(\alpha\beta_1 z)+D_t\sinh(\alpha\beta_2 z)]\}e^{i\alpha x}d\alpha\right\rangle \tag{38}$$
$$\tau_{xz}^{(t)}(x,z)=\mathrm{Re}\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\alpha^2[A_t\beta_1^2\sinh(\alpha\beta_1 z)+B_t\beta_2^2\sinh(\alpha\beta_2 z)+\right.$$
$$\left.+C_t\beta_1^2\cosh(\alpha\beta_1 z)+D_t\beta_2^2\cosh(\alpha\beta_2 z)]\}e^{i\alpha x}d\alpha\right\rangle$$

$$u^{(t)}(x,z)=\mathrm{Re}\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{i\alpha[A_tR_1\cosh(\alpha\beta_1 z)+B_tR_2\cosh(\alpha\beta_2 z)+\right.$$
$$\left.+C_tR_1\sinh(\alpha\beta_1 z)+D_tR_2\sinh(\alpha\beta_2 z)]\}e^{i\alpha x}d\alpha\right\rangle \tag{39}$$
$$w^{(t)}(x,z)=\mathrm{Re}\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\alpha[A_tQ_1\sinh(\alpha\beta_1 z)+B_tQ_2\sinh(\alpha\beta_2 z)+\right.$$
$$\left.+C_tQ_1\cosh(\alpha\beta_1 z)+D_tQ_2\cosh(\alpha\beta_2 z)]\}e^{i\alpha x}d\alpha\right\rangle$$

W półpłaszczyźnie z kolei definiują je wyrażenia:

$$\sigma_x^{(\infty)}(x,z)=\mathrm{Re}\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{[C_\infty\alpha^2-D_\infty\alpha(2-\alpha z)]e^{-\alpha z}\}e^{i\alpha x}d\alpha\right\rangle$$
$$\sigma_z^{(\infty)}(x,z)=\mathrm{Re}\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[-\alpha^2(C_\infty-D_\infty z)e^{-\alpha z}\}e^{i\alpha x}d\alpha\right\rangle \tag{40}$$
$$\tau_{xz}^{(\infty)}(x,z)=\mathrm{Re}\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{i\alpha[-C_\infty\alpha+D_\infty(1-\alpha z)]e^{-\alpha z}\}e^{i\alpha x}d\alpha\right\rangle$$

$$u^{(\infty)}(x,z)=\mathrm{Re}\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{i}{2G_\infty}[C_\infty\alpha-D_\infty(2-2\nu_\infty-\alpha z)]e^{-\alpha z}\right\}e^{i\alpha x}d\alpha\right\rangle$$
$$w^{(\infty)}(x,z)=\mathrm{Re}\left\langle \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2G_\infty}[C_\infty\alpha+D_\infty(1-2\nu_\infty+\alpha z)]e^{-\alpha z}\right\}e^{i\alpha x}d\alpha\right\rangle \tag{41}$$

3. Podsumowanie

Z uwagi na złożoność formuł opisujących geomechaniczny model górotworu uwarstwionego, a w konsekwencji niemożliwość uzyskania zamkniętych wyrażeń analitycznych, zaproponowano zastąpienie ośrodka wielowarstwowego ośrodkiem transwersalnie izotropowym. Przedstawiony aparat matematyczny, na podstawie odpowiednich warunków brzegowych, pozwala na określanie składowych tensora naprężenia i wektora przemieszczenia w dowolnym punkcie analizowanego ośrodka skalnego.

Zastosowanie w prognozach kopalnianych uproszczonego modelu górotworu uwarstwionego, oprócz wydatnego skrócenia obliczeń, nie wymaga znajomości, często niemożliwych do uzyskania w praktyce ruchowej, wszystkich parametrów charakteryzyjących własności geomechaniczne poszczególnych warstw oraz warunków panujących na ich kontaktach.

LITERATURA

[1] *Burtan Z.*: Geomechaniczny model górotworu uwarstwionego. Górnictwo i Geoinżynieria (kwartalnik AGH), 2010, Rok 34, zeszyt 3/1

[2] *Kłeczek Z., Zorychta A.*: Wpływ zaszłości eksploatacyjnych na stan naprężenia górotworu zagrożonego tąpaniami. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Górnictwo 1990, z. 185

[3] *Możarowski W.W., Starżinski W.E.*: Prikladnaja mechanika sloistych tiel iz kompozitow. Nauka i Technika. Mińsk, 1988

[4] *Salamon M.D.G.*: Elastic moduli of a stratified rock mass. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 1968, Vol. 5, Nom. 6

[5] *Sneddon I. N.*: Metoda transformacji całkowych w mieszanych zagadnieniach brzegowych klasycznej teorii sprężystości. Polska Akademia Nauk. Ossolineum, Wrocław, 1974

[6] *Zorychta A., Burtan Z.*: Wpływ warstwowej budowy ośrodka skalnego na kształtowanie się stanu naprężenia i zagrożenie tąpaniami. Prace Naukowe Głównego Instytutu Górnictwa. Seria Konferencje, nr 26. Katowice, 1998