

*Jerzy Bauer**, *Wojciech Puła***, *Marek Wyjadłowski***, *Monika Schleiss****

ANALIZA PRZEMIESZCZEŃ POPPRZECZNIE OBCIĄŻONEJ GRUPY PALI W OŚRODKU LINIOWO SPRĘŻYSTYM O CECHACH LOSOWYCH****

1. Wprowadzenie

Nośność grupy pali na obciążenia poziome oblicza się rozpatrując stany graniczne nośności i stany graniczne użytkowalności. Obciążenia poziome grup palowych mogą mieć charakter statyczny i dynamiczny. W przypadku stanu granicznego nośności decydujący jest zazwyczaj warunek nośności gruntu na docisk boczny pala. Z punktu widzenia projektowania najistotniejszy jest warunek ograniczenia przemieszczeń poziomych oczepu grupy palowej (np. ze względu na wymagania dylatacji i łożysk mostowych). Kolejny warunek wymagający sprawdzenia to ograniczenie wartości ekstremalnych momentów zginających pal. Zasadniczą trudność w budowie modelu obliczeniowego grupy palowej stanowi określenie odkształcalności gruntu współdziałającego z palami oraz uwzględnienie współpracy z oczepem. Stosowane w praktyce metody obliczeniowe oceny nośności pali obciążonych siłami poziomymi pochodzą z lat 60. i 70. ubiegłego wieku [2, 11]. Oszacowanie zapasów bezpieczeństwa, które w nich występują, jest nadal przedmiotem badań [15–17].

Układy palowe są posadowione w gruncie, który jest ośrodkiem o określonej sztywności i reagującym na przemieszczenia zagłębionej w nim konstrukcji. Reakcja otaczającego gruntu sprawia, że pale ulegają zginaniu, nawet przy przegubowym ich połączeniu z oczepem. Na pracę całego układu wpływa także sztywność oczepu palowego.

Opracowano zatem metody obliczeniowe uwzględniające współpracę pali ze sprężystym lub sprężysto–plastycznym ośrodkiem gruntowym [6]. Badania nośności grup palo-

* Instytut Górnictwa, Wydział Geoinżynierii, Górnictwa i Geologii, Politechnika Wroclawska, Wrocław

** Instytut Geotechniki i Hydrotechniki, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska, Wrocław

*** studentka, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska, Wrocław

**** Praca finansowana ze środków na naukę w latach 2008-2010 jako projekt badawczy

wych przedstawiono m.in. w pracach [10, 14]. Podejście probabilistyczne nabiera dużego znaczenia ze względu na wrażliwość zadania na zmienność parametrów podłoża oraz zmienność obciążeń [4]. Dla poprzecznie obciążonych pali odkształcalnych kompleksową analizę probabilistyczną ugięć przedstawił Tandjirja ze współautorami [15]. W tej pracy ugięcia pali obliczane są na podstawie szeroko stosowanej w Stanach Zjednoczonych metody „*p-y curves*”. Narzędziem służącym obliczeniom probabilistycznym jest w tym przypadku metoda powierzchni odpowiedzi. W ramach prezentowanej tu pracy autorzy podjęli się probabilistycznej analizy ugięć grupy palowej w ośrodku liniowo sprężysto–plastycznym.

2. Metoda powierzchni odpowiedzi

Metoda powierzchni odpowiedzi [5, 13] polega na aproksymowaniu nieznannej funkcji, dla której znana jest jedynie pewna liczba wartości, przez odpowiednio przyjętą funkcję aproksymującą. Funkcja aproksymująca może być dobrana na podstawie wyników badań eksperymentalnych, a także wyników obliczeń numerycznych. W przypadku obliczeń numerycznych poszukuje się relacji pomiędzy parametrami modelu x_1, x_2, \dots, x_n , wprowadzonymi jako dane wejściowe, a wartościami otrzymanymi na „wyjściu” $y = k(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Określenie, oczywiście w sposób przybliżony, takiej zależności prowadzi do zastąpienia uciążliwej do zaprogramowania procedury numerycznej przez prostą zależność analityczną, służącą do przewidywania „odpowiedzi” analizowanego modelu na zadane wymuszenia. Dla uproszczenia obliczeń niezawodnościowych, stosuje się możliwie nieskomplikowane funkcje aproksymujące, np. wielomiany drugiego lub trzeciego stopnia. Niestety, wielomiany te w analizie probabilistycznej wykonywanej za pomocą programu COMREL dają często błędne wyniki związane z przeskokiem obliczeń na gałąź niefizyczną paraboloidy. W celu uniknięcia tego utrudnienia w niniejszej pracy powierzchnią odpowiedzi będzie funkcja związana z sieciami neuronowymi.

W przypadku analizy zjawisk losowych, aproksymowanie nieznannej funkcji w podejściu regresyjnym, wywodzącym się ze statystyki matematycznej, wydaje się metodologicznie najbardziej adekwatne. Zadanie polega na określeniu funkcji opisującej w sposób jawny przemieszczenie układu palowego w zależności od zmiennych takich jak obciążenia, wielkości geometryczne i stałe materiałowe, które mogą być uważane za zmienne losowe. Funkcja ta, oznaczana dalej jako $U(\mathbf{X})$, będzie użyta do zdefiniowania funkcji stanu granicznego. W praktycznych przykładach grup palowych nie jest znana jawna postać funkcji przemieszczenia. Na podstawie wyników uzyskanych z obliczeń modelu numerycznego zadania, można wyznaczyć wartości przemieszczenia dla przyjętych wielkości stałych materiałowych, obciążeń oraz stałych geometrycznych modelu obliczeniowego. Przybliżoną funkcję $U(\mathbf{X})$ można modelować za pomocą regresji nieliniowej w następującej postaci:

$$E(U) = h(\mathbf{X}, \mathbf{B}) + err \quad (1)$$

gdzie h jest pewną funkcją elementarną, której postać przyjmuje się jako założenie, $E(U)$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej U , \mathbf{X} jest wektorem m argumentów, \mathbf{B} jest wek-

toem k szukanych parametrów modelu regresji, a err jest zmienną losową opisującą błąd estymacji funkcji U . Wyznaczenie wartości wektora parametrów \mathbf{B} dokonuje się poprzez proces minimalizacji sumy kwadratów różnic wielkości danych funkcji U_i (wartości funkcji) i przewidywanych \hat{U}_i :

$$\psi = \sum_{i=1}^n (U_i - \hat{U}_i)^2 \quad (2)$$

dla zestawu n danych: $(U_i, X_{il}), i = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2 \dots m$. Zmienna losowa err błędu estymacji posiada zerową wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe równe:

$$\sigma_{err} = \sqrt{\frac{\psi_{\min}}{n - k}} \quad (3)$$

Najbardziej rozpowszechnione metody znajdowania minimum funkcji ψ to metoda linearyzacji oraz metoda najszybszego spadku. W skomplikowanych sytuacjach warto użyć programu NLIN 2 opartego na kompromisie Marquardta [9], pozwalającego wybrać pośredni, optymalny kierunek przyrostu wektora parametrów znacznie przyspieszający zbieżność procesu iteracyjnego. W rozpatrywanym przypadku przemieszczenie oczepu układu palowego stanowi odpowiedź układu, a parametry ośrodka gruntowego stanowią dane wejściowe.

3. Model obliczeniowy

W rozpatrywanym zadaniu zamodelowano grupę palową jako płaski układ statyczny za pomocą metody uogólnionej [6], która uwzględnia współpracę pali ze sprężystym lub sprężysto–plastycznym ośrodkiem gruntowym. Ośrodek gruntowy odpowiada na przemieszczenia zagłębionej w nim grupy palowej. Do obliczeń przyjmuje się model sprężysto–plastyczny reakcji gruntu. Przedstawiony schemat blokowy (rys. 1) przedstawia iteracyjny sposób rozwiązania podpory palowej metodą uogólnioną. W pierwszym kroku oblicza się sztywności podpór oraz wartość ich reakcji granicznych. Obliczenia reakcji poziomej gruntu Kx_j przeprowadzono za pomocą programu KxGenerator [7]. W obliczeniach uwzględnia się m.in.: technologię palową, rozstaw pali, warunki geotechniczne w podłożu. Wartość reakcji poziomej podłoża Kx_j w warstwie „j” oblicza się ze wzoru:

$$Kx_j = \eta_1 \eta_2 S_{nj} \kappa \phi_j E_{0j} \quad (4)$$

gdzie:

- η_1, η_2 — współczynniki zależne od rozstawu pali i liczby rzędów pali w ustroju, według [18],
- S_{nj} — współczynnik technologiczny,
- κ — współczynnik zależny od kształtu poprzecznego pala,
- ϕ_j — współczynnik uwzględniający wpływ długotrwałości działania obciążeń i obciążeń powtarzalnych,
- E_{0j} — pierwotny moduł odkształcenia ogólnego gruntu w warstwie „j”.

Obliczona według wzoru (4) wartość modułu Kx jest wartością maksymalną, która mobilizuje się dopiero na pewnej głębokości krytycznej z_c , mierzonej od pierwotnego poziomu terenu lub zastępczego poziomu interpolacji w przypadku występowania gruntów nienosiących. Do głębokości z_c wartość Kx rośnie liniowo od zera do maksymalnej wartości Kx zgodnie ze wzorem (4), a głębiej pozostaje już stała [6].

Obliczenie sztywności podpór sprężystych kx na podstawie modułu reakcji poziomej gruntu Kx odbywa się według wzoru (5):

$$kx_i = Kx_i a_i \quad (5)$$

gdzie: a_i — rozstaw podpór.

Sztywność osiową gruntu względem pała można wyrazić za pomocą pojedynczej podpory podłużnej pod podstawą o sztywności Kz , a wzdłuż poboczniczy zostawić tylko podpory poziome (kx_i) (rys. 2). Podpora pod podstawą pała (Kz) powinna być zawsze ustawiona osiowo względem pała. Wyznaczenie wartości sztywności poziomych podpór sprężystych umożliwia dalszą analizę układu palowego łącznie z nadbudową (płytą, ławą, stopą fundamentową) lub innymi elementami konstrukcyjnymi jako jednego układu statycznego.

Jeżeli w podporach sprężystych (o sztywnościach kx_i) wystąpi reakcja graniczna R_{gr} , to dalsze przemieszczenia konstrukcji odbywają się już bez przyrostu reakcji gruntu. W rejonie tych podpór następuje uplastycznienie gruntu.

Obliczeniowy graniczny opór boczny gruntu $q_{xgr}^{(r)}(z)$ w warstwie „j” na głębokości z oblicza się według wzoru:

$$q_{xgr}^{(r)}(z) = m_i S_n D^{(r)} \left[\sigma'_{rz} K_{qi} + c_j^{(r)} K_{cj} \right] \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right] \quad (6)$$

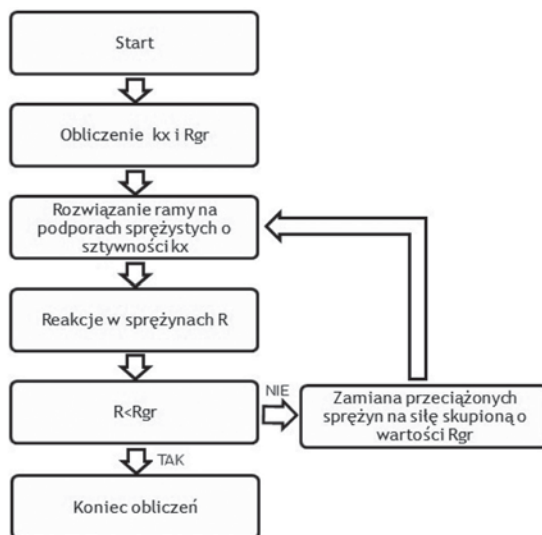
gdzie:

- m_i — współczynnik korekcyjny wg [18], równy 0,8 dla gruntów niespoistych oraz 0,7 dla gruntów spoistych,
- składowa pionowa obliczeniowego naprężenia efektywnego w gruncie na głębokości z ,
- K_{qi}, K_{cj} — współczynniki oporu poziomego gruntu, odczytywane z nomogramów Brinch Hansena [2] lub wg [8],
- S_n — współczynnik technologii wykonywania pała.

Wartość granicznej reakcji podpór sprężystych R_{gr} określa się podobnie jak sztywności podpór kx_i , według wzoru (7):

$$R_{xri} = q_{xgr}^{(r)}(z) a_i \quad [\text{kN}] \quad (7)$$

Następnie wprowadza się układ palowy jako ustrój statyczny, w którym pale modelowane są jako pręty na podporach sprężystych o sztywności wg (5), natomiast sztywności EI oraz EA odpowiadają sztywności pali oraz oczezu (rys. 2). Schemat blokowy rozwiązania układu palowego metodą uogólnioną przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat blokowy rozwiązywania układów palowych metodą uogólnioną

Dla rozwiązania zagadnienia zamodelowano grupę czterech pali w uwarstwionym, liniowo sprężystym ośrodku gruntowym. Częściami składowymi tego układu, przedstawionego na rysunku 2, są:

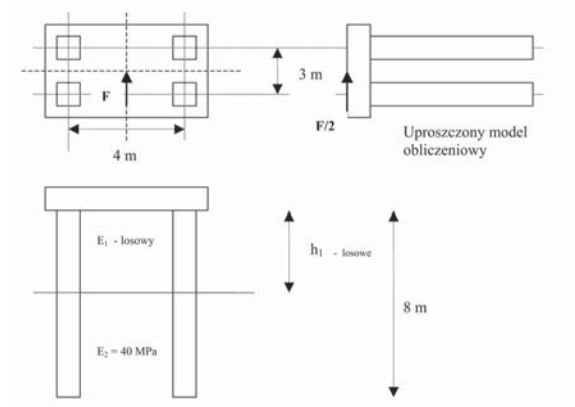
- pale prefabrykowane 35×35 cm, wbijane, z betonu klasy C30/37,
- grupa palowa złożona z 4 pali, osiowy rozstaw pali 3×4 m,
- do obliczeń wartości kx i R_{gr} jest uwzględniany cały układ palowy,
- długość pala $l = 8$ m, wysokość oczezu 0,80 m,
- zagłębienie w pierwszej warstwie jest zmienną losową o wartości oczekiwanej $h_1 = 2,5$ m,
- pierwsza warstwa „słaba”, wartość oczekiwana modułu $E_1 = 9,0$ MPa, grunt przyjęto jako glinę piaszczystą z grupy genetycznej C, o $I_L = 0,70$,
- druga warstwa „mocna”, $E_2 = 40$ MPa, grunt przyjęto jako piasek drobny o $I_{LD} = 0,40$.

Istniejąca płaszczyzna symetrii pozwala przeprowadzić obliczenia dla uproszczonego modelu płaskiego (połowa układu): 2 pale i oczep uwzględniony przez połowę sztywności oczezu. Siła obciążająca układ jest deterministyczna i wynosi $F/2 = 150$ kN.

Miarodajne są przemieszczenia poziome U w środku oczezu.

Więzi sprężyste wzdłuż osi pali przyjęto co 0,50 m, zgodnie z zaleceniami [6, 7].

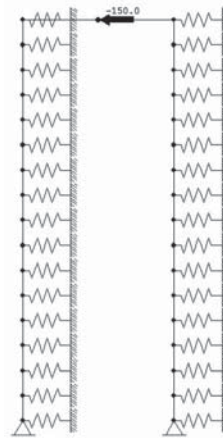
Schemat grupy palowej oraz połowę układu palowego do obliczeń statycznych przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat grupy palowej w przykładowym obliczeniowym

Ponieważ układ obciążony jest tylko siłą poziomą, w podstawie zamodelowano podpórę przegubowo przesuwą, co nie zmienia wartości reakcji poziomych w podporach ani wartości przemieszczeń poziomych układu. Dla przyjętego obciążenia w żadnym z analizowanych przypadków nie została przekroczona wartość granicznego oporu gruntu, nie doszło do uplastycznienia gruntu. Schemat statyczny układu przedstawiono na rysunku 3.

W kolejnym etapie obliczeń oszacowano wartości przemieszczeń poziomych odczepu konstrukcji jak dla schematu statycznego na rysunku 3. Wyniki uzyskiwanych przemieszczeń wykorzystano do wyznaczenia powierzchni odpowiedzi.



Rys 3. Schemat statyczny układu palowego

4. Podejście probabilistyczne

W podejściu probabilistycznym dla rozpatrywanej grupy palowej przyjęto, że zmiennymi losowymi są moduł Younga E oraz miąższość warstwy słabej. Za stan awaryjny można

uznać taki, w którym przemieszczenie oczepu grupy palowej przekroczy określoną wartość u_0 . Zadanie polega na znalezieniu następującego prawdopodobieństwa:

$$p_F = P\{U(\mathbf{X}) > u_0\} \quad (8)$$

gdzie $U(\mathbf{X})$ jest przemieszczeniem głowicy pala zależnym od wektora parametrów \mathbf{X} , zawierającego zarówno losowe jak i nielosowe komponenty. Jako równoważną miarę stosuje się wskaźnik niezawodności β , związany z prawdopodobieństwem (8) zależnością:

$$p_F = \Phi_0(-\beta) \quad (9)$$

w której Φ_0 jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego.

Do obliczenia miar (8) i (9) zastosowano metody FORM i SORM szeroko rozpowszechnione w ramach teorii niezawodności konstrukcji [3, 12]. Najistotniejszym elementem tych metod jest znalezienie tzw. punktu obliczeniowego y^* . Punkt obliczeniowy jest to punkt leżący na powierzchni stanu granicznego

$$\{x: U(x) = u_0\} \quad (10)$$

którego odległość do początku układu współrzędnych w układzie standardowych zmiennych normalnych jest najmniejsza [3, 12]. Wokół tego punktu skoncentrowana jest największa „masa prawdopodobieństwa” determinująca prawdopodobieństwo (8) i wokół niego wyznacza się powierzchnie odpowiedzi. W niniejszej pracy przyjęto procedurę zaproponowaną przez Bauera i Pułę, szczegółowo opisaną w [1].

Przyjmując powierzchnię odpowiedzi w postaci następującego tangensa hiperbolicznego związanego z siecią neuronową o dwóch wejściach:

$$U(E_1, h_1) = B_4 \tanh(B_1 E_1 + B_2 h_1 + B_3) + B_5 \quad (11)$$

i traktując wyrażenie (11) jako model regresji wyznacza się początkowe wartości b_i parametrów B_i za pomocą regresji nieliniowej.

Otrzymaną powierzchnię $U(E_1, h_1)$ podstawiono do wzoru (10), uzyskując powierzchnię stanu granicznego. Następnie stosując metodę FORM znajduje się punkt obliczeniowy y^* położony na tej powierzchni. Powyższe kroki postępowania powtarza się w otoczeniu punktu obliczeniowego, zmniejszając zakres zmiennych losowych na przykład do plus/minus połowy odchylenia standardowego od wartości współrzędnych wyznaczających punkt obliczeniowy. Wymaga to wyznaczenia nowego zestawu współczynników B_i . Wyznaczone w ten sposób współrzędne punktu obliczeniowego najczęściej są już wystarczająco dokładne, co sprawdza się przez obliczenia w przyjętym modelu obliczeniowym dla grupy pali. Gdy zachodzi konieczność zwiększenia dokładności obliczeń, to można całą procedurę postępowania powtórzyć, zmniejszając jeszcze bardziej zakres zmiennych losowych, np. do plus/minus

jednej czwartej odchylenia standardowego od wartości współrzędnych poprzednio wyznaczonego punktu obliczeniowego. Krok ten wymaga wyznaczenia za pomocą postępowania regresyjnego kolejnego zestawu współczynników B_i .

Powierzchnie odpowiedzi wyznaczano w postaci wyrażenia (11) zgodnie z procedurą przedstawioną w [1]. Zadowalająca zbieżność została osiągnięta po dwóch iteracjach. W tabeli 1 zamieszczono współczynniki B_i uzyskane w drugim kroku iteracyjnym.

TABELA 1
Wartości współczynników B_i powierzchni odpowiedzi drugiej iteracji

Iteracja	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
II	0,094536	-0,352018	1,53682	-1,75986	2,37700

Tak określona powierzchnia odpowiedzi zostanie użyta w obliczeniach probabilistycznych.

5. Obliczenia probabilistyczne

Obliczenia przeprowadzono dla następujących zmiennych losowych: modułu Younga E dla pierwszej warstwy gruntu oraz parametru miąższości h_1 pierwszej warstwy. Uwzględniono różne możliwe wartości współczynników zmienności zmiennych losowych.

Założenia dotyczące probabilistycznych charakterystyk parametrów losowych modelu zestawiono w tabeli 2.

TABELA 2
Charakterystyki probabilistyczne parametrów zadania

Parametr	Wartość średnia	Współczynnik zmienności	Rozkład prawdopodobieństwa
Moduł Younga warstwy E_1	9,0 MPa	5% 10% 20%	lognormalny
Miąższość warstwy h_1	2,5 MPa	7,5% 10% 15%	normalny
Siła pozioma w głowicy F	150 kN		nielosowa
Dopuszczalne przemieszczenie głowicy pała u_0	0,010 m	—	nielosowe

Dodatkowo, powierzchnia odpowiedzi zawiera zmienną losową błędu o wartości oczekiwanej zero i odchyleniu standardowym $\sigma_{err} = 0,0113$ cm.

W pierwszym etapie obliczeń traktowano poszczególne zmienne losowe jako stochastycznie niezależne. W kolejnym etapie obliczeń założono korelację pomiędzy zmiennymi losowymi modułu Younga E oraz parametru miąższości warstwy. Przyjęto korelacje dodatnią oraz ujemną o wartościach $\rho = -0,50$, $\rho = +0,50$.

Uzyskana powierzchnia odpowiedzi została zastosowana w powierzchni stanu granicznego (10) do obliczenia prawdopodobieństwa (8) i wskaźnika niezawodności (9). Dla różnych wartości współczynników zmienności v dla przypadku bez korelacji zmiennych losowych E oraz h otrzymano wyniki wskaźnika niezawodności β , które zestawiono w tabeli 3.

TABELA 3

Wartości wskaźnika niezawodności układu palowego

Współczynnik zmienności	Wskaźniki niezawodności β			
	Współczynnik zmienności v_E			
v_h	5,0%	10%	15%	20%
5%	7,515	5,439	4,157	3,332
10%	4,632	3,880	3,632	2,752
15%	3,261	2,939	2,596	2,292

Dla wybranych przykładów skorelowanych zmiennych losowych E oraz h otrzymano wskaźniki niezawodności β , które zestawiono w tabeli 4.

TABELA 4

Wartości wskaźnika niezawodności układu palowego

Współczynnik zmienności		Wskaźniki niezawodności β	
v_E	v_h	Współczynnik korelacji ρ	
		-0,50	+0,50
10%	10%	3,194	5,368
20%	15%	1,860	3,254

Dodatnia korelacja modułu Younga E oraz miąższości warstwy h wpływa korzystnie na niezawodność układu grupy palowej. W zadaniu tego typu istotna jest analiza wrażliwości wskaźnika niezawodności na wahania poszczególnych zmiennych losowych. Można to zilustrować dla wyników wybranych przykładów bez korelacji.

TABELA 5

Analiza wrażliwości układu dla zmiennych losowych nieskorelowanych

Współczynniki zmienności	β	p_F	Współczynniki punktu obliczeniowego		Współczynniki wrażliwości		
			E^*	h^*	α_E	α_h	α_{err}
$v_F = 10\%$ $v_h = 10\%$	3,880	5,21806E-5	7,10833	3,25974	0,599	-0,786	-0,15
$v_F = 15\%$ $v_h = 20\%$	2,292	1,0943E-2	6,52004	3,11942	0,676	-0,731	-0,092

Współczynnik wrażliwości dla błędu α_{err} wykazuje minimalną wartość, co oznacza, że zmienna losowa błędu nie wprowadza istotnej zmienności stochastycznej do analizowanego modelu grupy pali.

6. Podsumowanie

Praca przedstawia rezultaty probabilistycznego modelowania przemieszczeń grupy palowej obciążonej siłą poprzeczną. Grupa pali umieszczona jest w uwarstwionym ośrodku o cechach losowych. W zadaniu połączono obliczenia metodą klasyczną z metodą powierzchni odpowiedzi oraz metodami FORM i SORM wyznaczania wskaźników niezawodności. Iteracyjny proces dochodzenia do końcowej postaci powierzchni odpowiedzi okazał się szybko zbieżny. Przedstawiony przykład wskazuje, że o prawdopodobieństwie przekroczenia dopuszczalnej wartości przemieszczenia w głowicy pala decyduje przede wszystkim zmienność losowa miąższości warstwy słabej, a spośród parametrów podłoża zmienność modułu odkształcenia warstwy słabej.

LITERATURA

- [1] *Bauer J., Pula W.*: Reliability with Respects to Settlement Limit-states of Shallow Foundation on Linearly-deformable Subsoil. *Computers & Geotechnics*, 25, 3–4, 2000, pp. 281–308
- [2] *Brinch Hansen J.*: The Ultimate Resistance of Rigid Piles Against Transversal Force. The Danish Geotechnical Institute, Bulletin, 12, 1961
- [3] *Ditlevsen O., Madsen H.O.*: Structural Reliability Methods. John Wiley & Sons, Chichester, 1996
- [4] *Eloseily K.H., Bilal M. Ayyub, Patev R.*: Reliability Assessment of Pile Groups in Sands, *J. Struct. Engrg.* Volume 128, Issue 10, 2002, pp. 1346–1353
- [5] *Faravelli L.A.*: A Response Surface Approach for Reliability Analysis. *Journal of the Engineering Division ASCE*, 115 (12), 1989, pp. 2763–2781
- [6] *Kosecki M.*: Statyka ustrojów palowych. PZITB Szczecin, 2006
- [7] *Kowalski J.R.*: KxGenerator KappaProjekt, wersja 2.0 Instrukcja użytkownika
- [8] *Krasiński A.*: Obliczenia statyczne fundamentów palowych, Seminarium Zagadnienia posiadowań na fundamentach palowych. Gdańsk, 25 czerwca 2004
- [9] *Marquardt D.W.*: An Algorithm for Least-squares Estimation of Non-linear Parameters, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11, No. 2., 1963
- [10] *Patra Nihar Ranjan, Pise Prabhakar Jagannath*: Ultimate Lateral Resistance of Pile Groups in Sand, *J. Geotech. and Geoenviron. Engrg.* Volume 127, Issue 6, June 2001, pp. 481–487
- [11] *Poulos H.G., Davis E.H.*: Pile Foundation Analysis and Design. J. Wiley, New York, 1980
- [12] *Pula W.*: Zastosowania teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2004
- [13] *Rackwitz R.*: Response Surfaces in Structural Reliability. *Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke*, Heft 67, LKI, Technische Universität München, 1982
- [14] *Rollins K.M., Olsen R.J., Egbert J.J., Jensen D.H., Olsen K.G., Garrett B.H.*: Pile Spacing Effects on Lateral Pile Group Behavior: Load Tests, *J. Geotech. and Geoenviron. Engrg.* Volume 132, Issue 10, October 2006, pp. 1262–1271
- [15] *Tandjiria V. Teh C.I., Low B.K.*: Reliability Analysis of Laterally Loaded Piles Using Response Surface Methods. *STRUCT SAF* 22: 4, 2000, pp. 335–355
- [16] *Tahghighi & Konagai*: Numerical Analysis of Nonlinear Soil-pile Group Interaction under Lateral Loads. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27, 2007
- [17] *Zhabd & Small*: Analysis of Capped Pile Groups Subjected to Horizontal and Vertical Test. *Computers and Geotechnics* 26, 2001
- [18] PN-83/B-02482 Fundamenty budowlane. Nośność pali i fundamentów palowych