

Dariusz Łydźba, Adrian Różański**

OCENA WŁAŚCIWOŚCI MAKROSKOPOWYCH GEOKOMPOZYTÓW NA PODSTAWIE OBRAZU ICH MIKROSTRUKTURY

1. Wstęp

Skały i ośrodki gruntowe to materiały z właściwą sobie, wytworzoną przez naturalne procesy ich tworzenia, strukturą wewnętrzną. Morfologia tej struktury, tj. rozkład i położenie wzajemne faz tworzących ośrodek, mają charakter losowy i z tego względu ośrodki te zalicza się do grupy kompozytów losowych.

Przez pojęcie kompozyt [5] rozumie się ośrodek mikro–niejednorodny, tzn. z wytworzoną strukturą wewnętrzną, który w skali zastosowań inżynierskich jest makro–jednorodny, tzn. ma dla niego zastosowanie kontynuálny opis matematyczny taki jak dla jednorodnego ośrodka ciągłego. Skały i ośrodki gruntowe, ze względu na ich miejsce występowania oraz procesy ich wytworzenia, nazywane są również geokompozytami.

W terminologii rachunku prawdopodobieństwa, ośrodek losowy to pewna realizacja procesu losowego lub stochastycznego [7]. Realizacja jest zdarzeniem losowym ω należącym do przestrzeni zdarzeń Ω . Własność makroskopowa ośrodka losowego, stowarzyszona z wielkością mikroskopową $\eta(\mathbf{x}; \omega)$, będącą funkcją miejsca x i realizacji ω , to wartość oczekiwana z tej wielkości mikroskopowej, tj.:

$$\mathbb{E}\{\eta(\mathbf{x})\} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{x}, \omega) p(\omega) d\omega \quad (1)$$

gdzie:

$p(\omega)$ — gęstość prawdopodobieństwa,
 $\omega \in \Omega$ — operator wartości oczekiwanej.

* Instytut Geotechniki i Hydrotechniki, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska, Wrocław

Funkcja mikroskopowa $\eta(\mathbf{x}; \omega)$ nazywana jest również funkcją struktury ośrodka losowego. Z każdą funkcją struktury stowarzyszona jest, przez związek (1), odpowiadająca jej wielkość makroskopowa ośrodka losowego lub równoważnie, każdej wielkości makroskopowej odpowiada pewna wielkość mikroskopowa będąca funkcją struktury ośrodka losowego. Przykładowo, z porowatością ośrodka będącą makroskopową miarą ośrodka porowatego stowarzyszona jest funkcja struktury zwana funkcją charakterystyczną, tj.:

$$\eta(\mathbf{x}, \omega) = I^{(i)}(\mathbf{x}, \omega) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in v_i(\omega) \\ 0, & \mathbf{x} \notin v_i(\omega) \end{cases} \quad (2)$$

gdzie $v_i(\omega)$ to obszar zajmowany przez pory ośrodka.

Porowatość ośrodka jest więc równa:

$$\mathbb{E}\{I(\mathbf{x})\} = \int_{\Omega} I(\mathbf{x}, \omega) p(\omega) d\omega \quad (3)$$

Funkcja charakterystyczna (2) wykorzystywana jest również do zdefiniowania innej wielkości makroskopowej zwanej prawdopodobieństwem 2-punktowym [3,7], tj.:

$$\mathbb{E}\{I(\mathbf{x}) + I(\mathbf{x} + \mathbf{r})\} = \int_{\Omega} I(\mathbf{x}, \omega) I(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \omega) p(\omega) d\omega \quad (4)$$

Wielkość ta określa prawdopodobieństwo, że końce odcinka o współrzędnych odpowiednio \mathbf{x} oraz $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ znajdują się w tym samym składniku kompozytu zajmującym objętość $v_i(\omega)$ [3].

Bardziej złożone funkcje struktury związane są z makroskopowymi właściwościami mechanicznymi/cieplnymi ośrodka kompozytowego. Funkcji tych poszukuje się, najczęściej, z wykorzystaniem technik homogenizacji [2]. W szczególności, funkcją mikroskopową stowarzyszoną z makroskopową przewodnością cieplną kompozytu jest następująca funkcja struktury:

$$\eta(\mathbf{x}, \omega) = k(\mathbf{x}, \omega) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\partial \xi_i(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

gdzie $k(\mathbf{x}; \omega)$ to przewodność cieplna składników kompozytu, będąca funkcją miejsca oraz realizacji, natomiast $\xi_i(\mathbf{x}; \omega)$ jest rozwiązaniem następującego zagadnienia brzegowego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[k(\mathbf{x}, \omega) \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \xi_j(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_j} \right) \right] &= 0 \quad \text{w } V \\ \xi_j(\mathbf{x}, \omega) &= 0 \quad \text{na } \partial V \end{aligned} \quad (6)$$

W powyższej zależności symbol oznacza deltę Kroneckera.

W ośrodkach kompozytowych, które z założenia są makroskopowo (statystycznie) jednorodną wartością oczekiwana nie zależy od przyjętego początku układu współrzędnych, tj.:

$$\mathbb{E}\{\eta\} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{x}, \omega) p(\omega) d\omega = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \omega) p(\omega) d\omega \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad (7)$$

Powyższa zależność implikuje następującą równoważną definicję wielkości makroskopowej:

$$\mathbb{E}\{\eta\} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \int_{\Omega} \eta(\mathbf{x}, \omega) p(\omega) d\omega d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left[\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \eta(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} \right] p(\omega) d\omega \quad (8)$$

gdzie V jest objętością zajmowaną przez kompozytowy ośrodek losowy.

Jeśli dodatkowo:

$$\langle \eta \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \eta(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} \quad (9)$$

nie zależy od realizacji ω , wtedy statystycznie jednorodny ośrodek losowy jest również ergodyczny a wartość oczekiwana jest średnią objętościową

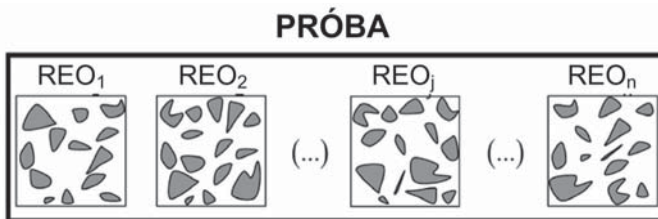
$$\mathbb{E}\{\eta\} = \langle \eta \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \eta(\mathbf{x}, \omega) d\mathbf{x} \quad (10)$$

wyznaczoną dla próbki ośrodka losowego o nieskończonej objętości.

W zastosowaniach inżynierskich próbka o nieskończonej objętości znaczy „wystarczająco duża próbka” i określana jest mianem tzw. *Reprezentatywnej Elementarnej Objętości* (REO). Oczywiście wielkość makroskopowa jest, w takim podejściu, określona jedynie z założonym błędem estymacji.

W wielu przypadkach, tak parametry mechaniczne, jak i obraz mikrostruktury kompozytu są znane. Wielkościami poszukiwanymi są jego właściwości makroskopowe zwane również parametrami efektywnymi kompozytu.

W niniejszym artykule przedstawia się oryginalną metodę oceny wielkości makroskopowych na podstawie obrazu mikrostruktury kompozytu. Zaproponowana w pracy metoda bazuje, w głównej mierze, na wynikach przedstawionych we wcześniejszych pracach autorów [4, 6] i w tym sensie jest ich kontynuacją. Do oceny wartości oczekiwanej zdefiniowanej związkami (10) wykorzystywane jest pojęcie „próby” będącej zbiorem n elementów REO, każdy o identycznej wielkości N_{REO} (rys. 1).



Rys. 1. Graficzna reprezentacja „próby”

Wartość oczekiwana, z założonym błędem tolerancji, estymowana jest zależnością:

$$\mathbb{E}\{\eta\} = \langle \eta \rangle \approx n^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{1}{V_{REO}} \int_{V_{REO}} \eta_j(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (11)$$

gdzie:

η_j — funkcja struktury odpowiadająca j -tej realizacji REO,
 n — wielkość próby.

Poprawność estymacji (11) zapewniają odpowiednio dobrane: wielkość próby n oraz wymiar REO, tj. NREO. Obie wielkości są ze sobą związane — większy wymiar REO wtedy wielkość próby może być mniejsza i odwrotnie, większa liczebność próby wtedy użyte REO może być mniejsze. Okazuje się jednak, że istnieje pewna krytyczna minimalna wielkość REO taka, że użycie mniejszego REO, nawet przy nieskończeniu wielkiej liczebności próby, spowoduje błędne oszacowanie wartości oczekiwanej (10).

Układ pracy jest następujący: w następnym paragrafie przedstawia się warunek na minimalny wymiar REO zapewniający poprawność estymacji (11), a następnie procedurę numeryczną wyznaczania tej wielkości na podstawie obrazu mikrostruktury ośrodka. Wielkość próby n , tj. warunek determinujący tę wielkość, rozważany jest w kolejnym rozdziale. Do wyznaczenia minimalnej wielkości próby wykorzystywane jest Centralne Twierdzenie Graniczne o zbieżności wartości średniej do rozkładu normalnego. Procedura numerycznej estymacji (11), na przykładzie oceny makroskopowej przewodności kompozytu, opisana jest w punkcie 5. Całość pracy kończą wnioski.

2. Minimalny wymiar REO

Jako minimalny wymiar REO proponuje się, w niniejszym artykule, przyjęcie takiej wielkości NREO, która zapewnia poprawną replikę funkcji prawdopodobieństwa 2–punktowego. Warunek ten sformułowany został i szczegółowo omówiony przez autorów w pracach [4, 6]. Poniżej przedstawiono jego ostateczną postać, tj.:

$$N_{2\text{-point}} = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), 2l_c(\varepsilon)\} \quad (12)$$

gdzie: ε jest założonym błędem tolerancji oraz l_c jest promieniem korelacji zdefiniowanym następująco:

$$\forall r \geq l_c(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{S_2^{(i)}(r) - c_i^2}{c_i^2} \right| \leq \varepsilon \quad (13)$$

W powyższej zależności funkcja $S_2^{(i)}(r)$ oznacza prawdopodobieństwo 2–punktowe dla składnika i , natomiast c_i to makroskopowa miara udziału frakcyjnego składnika i w kompozycie. Liczby $N_1(\varepsilon)$ oraz $N_2(\varepsilon)$ definiuje nierówność:

$$\forall N \geq N_i(\varepsilon) \Rightarrow \frac{\text{var}(c_i)}{c_i^2} \leq \varepsilon \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

Wariancja z udziału frakcyjnego, tj. $\text{var}(c_i)$, jest funkcją prawdopodobieństwa 2–punktowego i określa ją następująca zależność [1, 6, 7]:

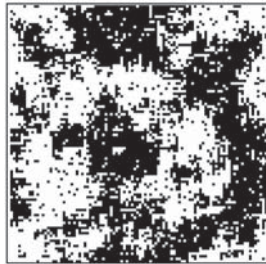
$$\text{var}(c_i)|_{N_{RVE}} = \frac{4}{N_{RVE}^4} \int_0^{N_{RVE}} \int_0^{N_{RVE}} (S_2^{(i)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) - c_i^2)(N_{RVE} - x_1)(N_{RVE} - x_2) dx_1 dx_2 \quad (15)$$

Zależności (12)–(15) jednoznacznie determinują minimalny wymiar REO zapewniający satysfakcjonującą replikę prawdopodobieństwa 2–punktowego. Wyznaczenie tej wartości, dla określonego obrazu mikrostruktury, wymaga jednak użycia metod numerycznych. Zagadnienie to omówione jest szczegółowo w następującym punkcie.

3. Procedura numerycznej oceny minimalnej wielkości REO

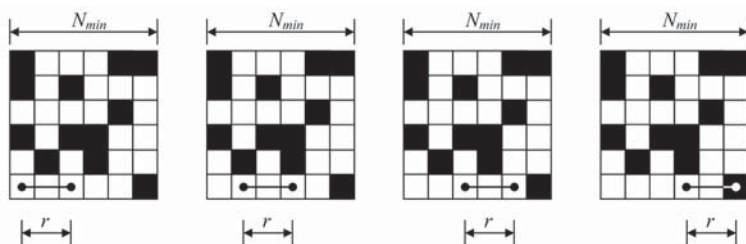
Niech dany jest obraz binarny ($M \times M$ pikseli) mikrostruktury ośrodka kompozytowego (rys. 2). Do każdego piksela przyporządkowujemy jedną z dwóch wartości, tj. 0 lub 1. Wartość 1 przyporządkowywana jest wtedy gdy piksel zawiera składnik kompozytu dla którego określana jest funkcja prawdopodobieństwa 2–punktowego, w przeciwnym razie przyporządkowana jest wartość 0. W ten sposób cyfrowy obraz mikrostruktury reprezentowany jest przez macierz $\mathbf{A}_{[M \times M]}$. Funkcję prawdopodobieństwa 2–punktowego, w sposób numeryczny-dyskretny, określa związek [6]:

$$S_2^{(1)}(r) = \frac{1}{M^2} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M \frac{A[i,j](A[i,j+r] + A[i+r,j])}{2} \quad r = 1, 2 \quad (16)$$



Rys. 2. Przykład obrazu binarnego mikrostruktury

Geometryczną interpretację tej procedury przedstawiono na rysunku 3. Funkcja prawdopodobieństwa 2–punktowego jest wyznaczana przez przesuwanie o 1 piksel odcinka o długości r pikseli po wszystkich wierszach i kolumnach obrazu oraz zliczanie wszystkich zdarzeń, w stosunku do wszystkich punktów, dla których dwa końce odcinka znajdują się w tym samym składniku kompozytu, dla którego wyznaczana jest funkcja prawdopodobieństwa 2–punktowego.



Rys. 3. Geometryczna interpretacja procedury określania prawdopodobieństwa 2-punktowego

Mając numerycznie wyznaczoną wartość prawdopodobieństwa 2-punktowego, wartość wariancji (zależność (15)) wyznacza się, stosunkowo prosto, wykorzystując metodę symulacji Monte Carlo. Rozważmy funkcję:

$$g(N) = \frac{4}{N^4} \int_0^N \int_0^N (S_2^{(i)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) - c_i^2)(N - x_1)(N - x_2) dx_1 dx_2 \quad (17)$$

Zauważmy, że spełniona jest następująca równoważność:

$$\frac{2}{N^2} \int_0^N (N - t) dt = 1 \quad (18)$$

która pozwala zdefiniować funkcję gęstości prawdopodobieństwa:

$$p(t) = \frac{2}{N^2} (N - t) \quad (19)$$

Zauważmy, że:

$$p(x_1, x_2) = p(x_1)p(x_2) \quad (20)$$

może być również traktowana jako gęstość prawdopodobieństwa. Wobec tego, wprowadzając funkcję:

$$h(x_1, x_2) = (S_2^{(i)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) - c_i^2) \quad (21)$$

całka w zależności (17) może być zinterpretowana, w ramach teorii prawdopodobieństwa, jako wartość oczekiwana funkcji h , tzn.:

$$g(N) = \int_0^N \int_0^N h(x_1, x_2) p_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = E\{h(X_1, X_2)\} \quad (22)$$

Zgodnie z metodą Monte Carlo, oszacowanie wartości oczekiwanej polega na wygenerowaniu sekwencji liczby pseudo-losowych (X_1^α, X_2^α) z gęstości prawdopodobieństwa $p(t)$ a następnie określeniu wartości średniej funkcji $h(x_1, x_2)$, tj.:

$$g(N) \approx \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^M h_2(X_1^\alpha, X_2^\alpha) \quad (23)$$

gdzie M oznacza liczbę realizacji Monte Carlo.

Zauważmy, że gęstości prawdopodobieństwa $p(t)$ odpowiada następująca dystrybuanta

$$Q(X) = \int_0^X \frac{2}{N^2} (N-x) dx = 1 - \frac{(N-X)^2}{N^2} \quad (24)$$

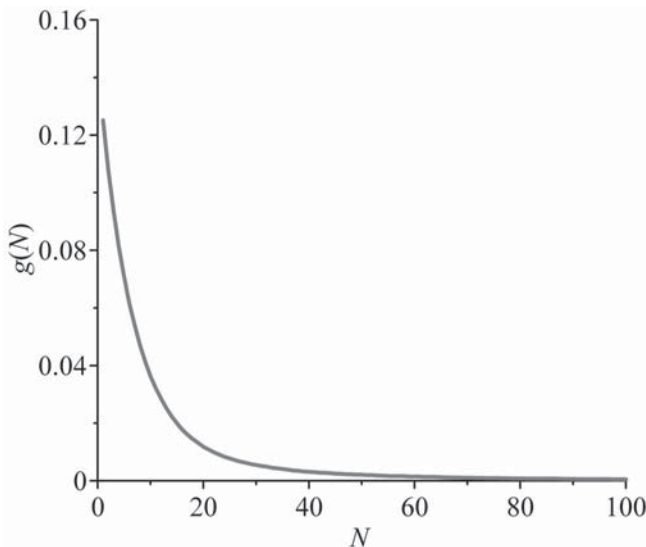
dla której zdefiniowana jest jednoznacznie, na przedziale $[0, 1]$, funkcja odwrotna:

$$X(Q) = N(1 - \sqrt{1 - Q(X)}) \quad (25)$$

Wobec tego zagadnienie generowania liczb pseudo-losowych odpowiadających dystrybuancie $Q(X)$ polega na generowaniu liczb pseudolosowych z rozkładu równomiernego $[0, 1]$ a następnie podstawieniu do zależności (25), w miejsce liczby $Q(X)$. Estymator (23) wyznacza następująca zależność:

$$g(N) \cong \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^M \left(S_2^{(\alpha)} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^2 X(Q_j)^2} \right) - c_i^2 \right) \quad (26)$$

Funkcja $g(N)$ to, zgodnie z zależnością (15), wartość wariancji z udziału frakcyjnego c_p , określona dla wielkości REO równego $N \times N$. Przykładowy przebieg tej funkcji, wyznaczonej dla obrazu cyfrowego mikrostruktury, przedstawia rysunek 4.



Rys. 4. Wykres funkcji g w zależności od wymiaru N

Wielkości $N_1(\varepsilon)$ oraz $N_2(\varepsilon)$ określa się, numerycznie, z zależności:

$$g(N_1(\varepsilon)) = \varepsilon c_1^2 \quad \wedge \quad g(N_2(\varepsilon)) = \varepsilon c_2^2 \quad (27)$$

Podobnie, tj. numerycznie, określa się z przebiegu funkcji prawdopodobieństwa 2-punktowego promień korelacji l_c . Ostatecznie minimalna wartość REO jest konsekwencją określenia maksymalnej wartości z trzech wyznaczonych liczb, tj. $N_{2\text{-point}} = \max\{N_1(\varepsilon), N_1(\varepsilon), 2l_c(\varepsilon)\}$.

4. Wielkość próby

Poprawne oszacowanie wartości oczekiwanej wymaga odpowiednio dobranej wielkości próby n . Estymator tej wielkości, zgodnie z zależnością (11), określa zależność:

$$\langle \eta \rangle^{app} = n^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{1}{V_{REV}} \int \eta_j(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (28)$$

Powyższe oszacowanie jest poprawne wtedy, gdy:

$$P(|\mathbb{E}\{\eta\} - \langle \eta \rangle^{app}| \leq \varepsilon_{abs}) \geq 1 - \alpha \quad (29)$$

co oznacza, że prawdopodobieństwo, iż różnica między estymowaną wartością a jej estymatorem będzie nie większa niż $\varepsilon_{abs} > 0$, jest nie mniejsze niż odpowiednia wartość prawdopodobieństwa dla zadanego poziomu ufności. W powyższym związku ε_{abs} oznacza zadany błąd bezwzględny estymacji natomiast α jest poziomem ufności. Wartości ε_{abs} oraz α są dane.

Nierówność (29) można przekształcić do postaci:

$$P\left(\left|\frac{\mathbb{E}\{\eta\} - \langle \eta \rangle^{app}}{\sqrt{\text{var}(\eta)}}\right| \leq \frac{\varepsilon_{abs}}{\sqrt{\text{var}(\eta)}}\right) \geq 1 - \alpha \quad (30)$$

Centralne Twierdzenie Graniczne zapewnia, że wartość średnia z niezależnych, o tym samym rozkładzie, zmiennych losowych może być aproksymowana przez standaryzowany rozkład normalny. Wobec tego, zależność (30) implikuje:

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon_{abs}}{\sqrt{\text{var}(\eta)}}\right) \geq 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (31)$$

lub równoważnie:

$$n \geq \frac{\text{var}(\eta)}{\varepsilon_{abs}^2} \left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 \quad (32)$$

gdzie $\Phi(*)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

W związkach (12)–(15) błąd tolerancji ε jest błędem względnym, wobec tego powyższą nierówność (32) można również przedstawić następująco:

$$n \geq \frac{\text{var}(\eta)}{\mathbb{E}^2\{\eta\}\varepsilon^2} \left(\Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 \quad (33)$$

gdzie:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{abs}}{\mathbb{E}\{\eta\}} \quad (34)$$

Nierówność (33) definiuje wielkość próby n , wykorzystując nieznaną wartość wielkości makroskopowej $\mathbb{E}\{\eta\}$. Okazuje się jednak, że wielkość próby konieczna do zapewnienia repliki prawdopodobieństwa 2–punktowego jest nie mniejsza niż wielkość próby konieczna do oceny makroskopowych właściwości mechaniczno/ciepłnych kompozytów [6]. Spełniona jest następująca nierówność [6]:

$$\frac{\text{var}(\eta)}{\mathbb{E}^2\{\eta\}} \leq 4 \frac{\text{var}(c_i)}{c_i^2} \quad (35)$$

Ponieważ wielkość REO spełnia nierówność (14), tj:

$$\frac{\text{var}(c_i)}{c_i^2} \leq \varepsilon \quad i = 1, 2 \quad (36)$$

wobec tego wielkość próby:

$$n \geq \frac{4}{\varepsilon} \left(\Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 \quad (37)$$

zapewnia odpowiednią estymację własności makroskopowej ośrodka kompozytowego.

Poziom ufności jest typowo przyjmowany na poziomie: 5%, 3% lub 1%, co odpowiada odpowiednio: $\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,03$ oraz $\alpha = 0,01$. Te wartości, zgodnie z tablicą rozkładu normalnego, implikują: $\Phi^{-1} \left(1 - \frac{0,05}{2} \right) = 1,96$, $\Phi^{-1} \left(1 - \frac{0,03}{2} \right) = 2,17$ oraz $\Phi^{-1} \left(1 - \frac{0,01}{2} \right) = 2,575$. Podstawienie tych wartości do nierówności (37) prowadzi do:

$$n \geq \begin{cases} n_{5\%} = \frac{15,37}{\varepsilon} \\ n_{3\%} = \frac{18,84}{\varepsilon} \\ n_{1\%} = \frac{26,52}{\varepsilon} \end{cases} \quad (38)$$

Wielkości próby n , określone przez powyższe nierówności, odpowiadają minimalnemu wymiarowi REO. Jeśli wykorzystywane będzie większe REO wtedy wielkość próby może być mniejsza. W takim przypadku należy określić numerycznie wartość:

$$\frac{\text{var}(c_i)}{c_i^2} = \frac{g(N(\varepsilon))}{c_i^2} \quad (39)$$

a następnie skorzystać z nierówności (35) oraz (33) w celu określenia odpowiedniej wielkości próby.

5. Ocena makroskopowego przewodnictwa cieplnego kompozytu

Procedura numerycznego określenia wartości makroskopowego przewodnictwa cieplnego kompozytu, na podstawie obrazu mikrostruktury, polega na zrealizowaniu następujących kroków:

- określenie funkcji prawdopodobieństwa 2–punktowego oraz minimalnego wymiaru REO, tak jak przedstawiono w punkcie 3,
- wyznaczenie, zgodnie z procedurą opisaną w punkcie 4, wielkości próby n ,
- z obrazu mikrostruktury wybranie, w sposób losowy, n „okien” o wymiarach $N_{REO} \times N_{REO}$,
- dla każdego wylosowanego „okna” należy rozwiązać, wykorzystując kod numeryczny np. Metody Elementów Skończonych, następujące zagadnienie brzegowe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[k(x, \omega) \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \xi_j(x, \omega)}{\partial x_j} \right) \right] &= 0 \quad \text{w } V_{REO} \\ \xi_j(x, \omega) &= \xi_j(x + N_{REO}, \omega) \quad \text{dla } \partial V_{REO} \end{aligned} \quad (40)$$

- wyznaczyć, dla każdego „okna”, średnią objętościową z otrzymanego rozwiązania:

$$K_j = \frac{1}{V_{REO}} \int_{V_{REO}} k(x, \omega) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\partial \xi_i(x, \omega)}{\partial x_i} \right) dx \quad (41)$$

Makroskopowa własność przewodnictwa cieplnego kompozytu określona jest ostatecznie jako średnia z próby, tj.:

$$\bar{K} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_j \quad (42)$$

6. Wnioski

Artykuł ten, będący kontynuacją wcześniejszych prac autorów [3, 4, 6], jest również ich pewnym podsumowaniem. W pracy tej przedstawiono procedurę numerycznego określania wielkości makroskopowych geokompozytów na podstawie obrazów cyfrowych ich mikrostruktury.

Postulowana możliwość określania własności makroskopowych przewodnictwa cieplnego poprzez wartość średnią z próby (42) wiąże się z dwoma głównymi problemami. Pierwszy z nich to określenie minimalnego wymiaru REO, drugi, to wyznaczenie wymiaru próby n , tj. liczby realizacji potrzebnej do dobrej estymacji własności makroskopowej. Jak wspomniano obie te wielkości są ze sobą bezpośrednio powiązane — odpowiednio duży wymiar REO stowarzyszony jest z małą liczebnością próby, i odwrotnie.

Jednak jak wykazano, głównie w pracy [6], istnieje pewna minimalna wielkość REO taka, że użycie mniejszego REO (nawet przy nieskończonej wielkiej liczbie próby) spowoduje błędne oszacowanie wartości oczekiwanej.

W szerokiej literaturze temat wielkości REO określana jest zazwyczaj poprzez badanie zbieżności wartości średniej (42) do wartości makroskopowej. Wiąże się to z długim czasem potrzebnym do określenia N_{REO} , bowiem dla różnych wymiarów N należy wielokrotnie rozwiązać zagadnienie brzegowe (6) wykorzystując metody numeryczne, np. MES. Procedura określania wielkości REO, a w konsekwencji własności makroskopowych geokompozytów, przedstawiona w niniejszej pracy bazuje na morfologii mikrostruktury zawartej w prawdopodobieństwie 2–punktowym. Jest innowacyjna i numerycznie znacznie bardziej efektywna w stosunku do innych metod znanych w szerokiej literaturze tematu. Pozwala na szybkie określenie wymiaru REO jedynie na podstawie znajomości funkcji prawdopodobieństwa 2–punktowego.

LITERATURA

- [1] *Lu B., Torquato S.*: Local Volume Fraction Fluctuations in Heterogeneous Media. *J. Chem. Phys.* 93 (5), 1990, pp. 3452–3459
- [2] *Łydźba D.*: Zastosowania metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skał. *Prace Naukowe Instytutu Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej*, seria: Monografie, 2002
- [3] *Łydźba D., Różański A.*: Statystyczna charakteryzacja miar geometrycznych mikrostruktur losowych: definicje, właściwości i zastosowania. *Górnictwo i Geoinżynieria*, Vol. 33 (1), 2009, s. 399–410
- [4] *Łydźba D., Różański A.*: Wielkość próbki a reprezentatywność geometryczna mikrostruktury kompozytów losowych. *Górnictwo i Geoinżynieria*, R. 34, z. 2, 2010, s. 443–450
- [5] *Milton G.W.*: *The Theory of Composites*. Cambridge University Press, 2002
- [6] *Różański A.*: *Random Composites: Representativity, Minimum RVE Size, Effective Transport Properties*. PhD dissertation, Université Lille 1, LML (UMR CNRS 8107), No.: 40444, 2010
- [7] *Torquato S.*: *Random Heterogeneous Materials. Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer–Verlag, New York, 2002