

**Rafał Wiśniowski\*, Stanisław Stryczek\*, Krzysztof Skrzypaszek\***

**WYZNACZANIE OPORÓW LAMINARNEGO PRZEPIYU  
ZACZYNÓW CEMENTOWYCH,  
OPISYWANYCH MODELEM HERSCHELA–BULKLEYA\*\***

**1. WSTĘP**

Zaczyny cementowe są coraz częściej stosowane w różnych typach działalności ludzkiej, począwszy od aplikacji inżynierskich, poprzez rolnicze, na biomedycznych czy dentystrycznych kończąc.

W zakresie aktywności inżynierskiej wyróżnić można dwie grupy zastosowań zaczynów cementowych:

- 1) budowę i eksploatację konstrukcji technicznych,
- 2) modyfikację właściwości gruntów i skał.

Wykorzystanie zaczynów cementowych w procesie budowy i eksploatacji konstrukcji technicznych związane jest z:

- instalacją fundamentów, płyt i pali fundamentowych;
- posadawianiem podziemnych i naziemnych konstrukcji (stalowych, betonowych i innych).

W obszarze tych zagadnień wymienić należy również technologie obejmujące:

- tworzenie konstrukcji oporowych,
- posadowienia głębokie,
- zmiany i naprawy posadowień,
- podchwycenia fundamentów,
- budowę i eksploatację wyrobisk górniczych,
- technologie związane z wypełnianiem pustek gruntowych lub skalnych, znajdujących się wokół eksploatowanych konstrukcji podziemnych (rurociągi, obudowy górnicze).

---

\* Wydział Wiertnictwa, Nafty i Gazu AGH, Kraków

\*\* Praca zrealizowana w ramach badań własnych WwNiG AGH

Modyfikacja właściwości gruntów i skał z zastosowaniem cementowych zaczynów obejmuje zagadnienia wzmocnienia, wymiany i uszczelniania gruntów oraz skał. Wzmocnienie i wymiana gruntów ma na celu stworzenie optymalnych warunków dla prowadzenia prac inżynierskich (budowa nowych obiektów, poprawa warunków eksploatacji już istniejących instalacji). Istotą uszczelniania gruntów i skał jest utworzenie barier ochronnych, uniemożliwiających lub ograniczających migrację płynów znajdujących się w skorupie ziemskiej.

Cementowe zaczyny wykorzystuje się w celu tworzenia:

- przegród uszczelniających,
- uszczelnień łukowych,
- szczelnych palisad,
- przekryć uszczelniających,
- poziomych ekranów uszczelniających,
- przepustów wody gruntowej.

## 2. MODELE REOLOGICZNE ZACZYNÓW CEMENTOWYCH

Tak szeroki zakres aplikacji przemysłowej zaczynów cementowych stwarza konieczność odpowiedniego doboru właściwości chemicznych, fizycznych i parametrów reologicznych cieczy. Szczególnie ważne jest dopasowanie modelu reologicznego, opisującego zjawiska fizyczne zachodzące podczas przepływu rzeczywistej mieszaniny cementowej. W zależności od przyjętego modelu reologicznego wykorzystuje się różne formuły obliczeniowe oraz otrzymuje odmienne wyniki. Model reologiczny jest bowiem tylko przybliżonym opisem właściwości rzeczywistego zaczynu cementowego, a zróżnicowanie rezultatów obliczeń wynika z przyjętej postaci matematycznej modelu oraz dokładności wyznaczenia parametrów reologicznych. Przy opisie związków pomiędzy naprężeniami stycznymi a wielkością szybkości ścinania w cieczach technologicznych stosuje się obecnie różne modele reologiczne (Newtona, Ostwalda de Waele, Bingham, Elisa, De Havena, Prandla–Eyringa, Powela–Eyringa, Reiner–Philipoffa, Sisko, Cassona, Herschela–Bulkleya), przy czym w technologiach cementacyjnych najpowszechniejsze zastosowanie znalazły modele cieczy reologicznie stabilnych: uogólnione ciecze newtonowskie (Newtona, Ostwalda de Waele) oraz liniowe ciecze plastycznolepkie (Bingham) [1, 2, 4].

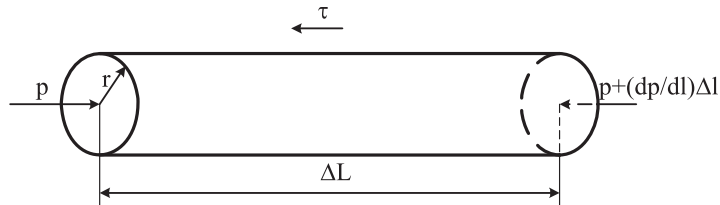
Rozwój technologii chemicznych, w tym stosowanie środków, umożliwiających modyfikację właściwości fizycznych i parametrów reologicznych cieczy powoduje, że wykorzystywane w praktyce przemysłowej ciecze wiertnicze mogą wykazywać zarówno cechy uogólnionych cieczy newtonowskich, jak i liniowych cieczy plastycznolepkich. Dla tego typu cieczy rozważa się więc inne modele reologiczne (Cassona, Herschela–Bulkleya).

Na uwagę zasługuje szczególnie model cieczy plastycznolepkiej Herschela–Bulkleya, dany w postaci [3, 7]

$$\tau = \tau_0 + k \left( -\frac{dv}{dr} \right)^n \quad (1)$$

### 3. PRZEPŁYW LAMINARNY ZACZYNÓW CEMENTOWYCH, OPISYWANYCH MODELEM HERSCHELA–BULKLEYA

Wyprowadzenie zależności pomiędzy strumieniem przepływającej cieczy a oporami przepływu w prostej poziomej rurze możliwe jest po rozważeniu zależności przedstawionych na rysunku 1.



Rys. 1. Rozkład naprężeń podczas laminarnego przepływu elementu cieczy przez rurę

Równanie równowagi sił można zapisać w postaci

$$p\pi r^2 - 2\pi r\Delta l\tau - \left(p + \frac{dp}{dl}\Delta l\right)\pi r^2 = 0 \quad (2)$$

Wprowadzając pojęcie oporów jednostkowych  $\frac{\Delta p}{\Delta L} = -\frac{dp}{dl}$ , przekształca się równanie (2) do postaci

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = \frac{2}{r}\tau \quad (3)$$

Uwzględniając w równaniu (3) model reologiczny cieczy Herschela–Bulkleya  $\tau = \tau_0 + k\left(-\frac{dv}{dr}\right)^n$ , uzyskuje się [9]

$$Q = \frac{\pi D^{\frac{3n+1}{n}}}{2^{\frac{3n+1}{n}}(n+1)(2n+1)(3n+1)} \left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{4\tau_0}{D\frac{\Delta p}{\Delta L}}\right)^{\frac{n+1}{n}} \cdot \left[ n(n+1)(2n+1) + 2n^2(n+1)\frac{4\tau_0}{D\frac{\Delta p}{\Delta L}} + 2n^3\left(\frac{4\tau_0}{D\frac{\Delta p}{\Delta L}}\right)^2 \right] \quad (4)$$

Rozwiązując numerycznie równanie (4), można wyznaczyć opory przepływu  $p$  zaczynu cementowego opisywanego modelem Herschela–Bulkleya dla zadanej wartości stru-

mienia objętości przepływu  $Q$ , w rurze o długości  $l$  i średnicy wewnętrznej  $D$ . Metodę numerycznego rozwiązania równania (4) przedstawiono w pracy [9].

W celu wyznaczenia zależności pomiędzy strumieniem przepływającej cieczy a oporami przepływu w przestrzeni pierścieniowej zawartej między dwoma koncentrycznie umieszczonymi rurami wprowadza się pojęcie średnicy ekwiwalentnej przekroju przepływu [1].

Średnica ekwiwalentna analizowanego przekroju przepływu to średnica hipotetycznego przekroju kołowego przez który cieczy płynąc ze średnią prędkością przepływu taką samą jak w rozważanym przekroju powoduje takie same opory przepływu.

Dla przestrzeni pierścieniowej zawartej pomiędzy dwoma koncentrycznie umieszczonymi rurami związek pomiędzy strumieniem przepływającej cieczy a oporami przepływu zaczynu cementowego, opisywanego modelem Herschela–Bulkleya, wyznaczać należy z równania

$$Q = \frac{\pi(D_2^2 - D_1^2)D_e^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{3n+1}{n}}(n+1)(2n+1)(3n+1)} \left( \frac{\Delta p}{\Delta L} \right)^{\frac{1}{n}} \left( 1 - \frac{4\tau_0}{D_e \frac{\Delta p}{\Delta L}} \right)^{\frac{n+1}{n}} \cdot \left( n(n+1)(2n+1) + 2n^2(n+1) \frac{4\tau_0}{D_e \frac{\Delta p}{\Delta L}} + 2n^3 \left( \frac{4\tau_0}{D_e \frac{\Delta p}{\Delta L}} \right)^2 \right) \quad (5)$$

#### 4. ŚREDNICA EKWIWALENTNA PRZEPLYWU

Średnicę ekwiwalentną pierścieniowego przekroju przepływu zaczynu cementowego wyznaczyć można korzystając z następujących metod:

- z porównania promieni hydraulicznych przekrojów przepływu [5]

$$D_e = D_2 - D_1 \quad (6)$$

- dla wąskich przestrzeni pierścieniowych, w wyniku porównania z przepływem zaczynu pomiędzy dwoma równoległymi płytami [6]

$$D_e = 0,816(D_2 - D_1) \quad (7)$$

- z zależności wyznaczonej dla cieczy newtonowskiej [7]

$$D_e = \left[ D_2^2 + D_1^2 - \frac{D_2^2 - D_1^2}{\ln \frac{D_2}{D_1}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

– z empirycznego wzoru Crittendona [1]

$$D_e = \frac{1}{2} \left[ D_2^4 - D_1^4 - \frac{(D_2^2 - D_1^2)^2}{\ln \frac{D_2}{D_1}} \right]^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} [D_2^2 - D_1^2]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Według zaleceń wzory (7) oraz (8) powinny być stosowane dla węższych przestrzeni pierścieniowych ( $D_1/D_2 < 0,3$ ), a wzory (6) i (9) dla szerszych przestrzeni pierścieniowych [1, 6].

## 5. LAMINARNOŚĆ PRZEPŁYWU

Warunek laminarności przepływu zaczynu uszczelniającego można zapisać w postaci

$$\bar{Re} < 2100 \quad (10)$$

Wartość uogólnionej liczby Reynoldsa wyznacza się z zależności

$$\bar{Re} = \frac{\rho v D_e}{\eta_e} \quad (11)$$

Dla przekroju o przekroju kołowym wynosi więc ona

$$\bar{Re} = \frac{4\rho Q}{\pi D \eta_e} \quad (11a)$$

Dla przekroju pierścieniowego powinna być wyznaczana z zależności

$$\bar{Re} = \frac{4\rho Q D_e}{\pi (D_2^2 - D_1^2) \eta_e} \quad (11b)$$

Wartość lepkości ekwiwalentnej cieczy opisywanej modelem Herschela–Bulkleya, wyznacza się, wykorzystując równanie Hagena–Poiseuille’a [1, 3, 5]:

– dla przekroju kołowego

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = \frac{128 \eta_e Q}{\pi D^4} \quad (12a)$$

– dla przekroju pierścieniowego

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = \frac{128 \eta_e Q}{\pi (D_2^2 - D_1^2) D_e^2} \quad (12b)$$

Wstawiając odpowiednio: wzór (12a) do (4) oraz (12b) do (5), uzyskuje się:

- równanie umożliwiające wyznaczenie lepkości ekwiwalentnej cieczy opisywanej modelem Herschela–Bulkeleya, przepływającej przez przekrój kołowy

$$Q = \frac{\pi D^{\frac{3n+1}{n}}}{2^{\frac{3n+1}{n}} (n+1)(2n+1)(3n+1)} \left( \frac{64\eta_e}{\pi k D^4} Q \right)^{\frac{1}{n}} \left( 1 - \frac{\pi \tau_0 D^3}{32\eta_e Q} \right)^{\frac{n+1}{n}} \cdot \left( n(n+1)(2n+1) + 2n^2(n+1) \frac{\pi \tau_0 D^3}{32\eta_e Q} + 2n^3 \left( \frac{\pi \tau_0 D^3}{32\eta_e Q} \right)^2 \right) \quad (13a)$$

- równanie umożliwiające wyznaczenie lepkości ekwiwalentnej cieczy opisywanej modelem Herschela–Bulkeleya, przepływającej przez przekrój pierścieniowy

$$Q = \frac{\pi(D_2^2 - D_1^2)D_e^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{3n+1}{n}} (n+1)(2n+1)(3n+1)} \left( \frac{64\eta_e}{\pi k (D_2^2 - D_1^2)D_e^2} \right)^{\frac{1}{n}} \left( 1 - \frac{\pi \tau_0 (D_2^2 - D_1^2)D_e}{32\eta_e Q} \right)^{\frac{n+1}{n}} \cdot \left( n(n+1)(2n+1) + 2n^2(n+1) \frac{\pi \tau_0 (D_2^2 - D_1^2)D_e}{32\eta_e Q} + 2n^3 \left( \frac{\pi \tau_0 (D_2^2 - D_1^2)D_e}{32\eta_e Q} \right)^2 \right) \quad (13b)$$

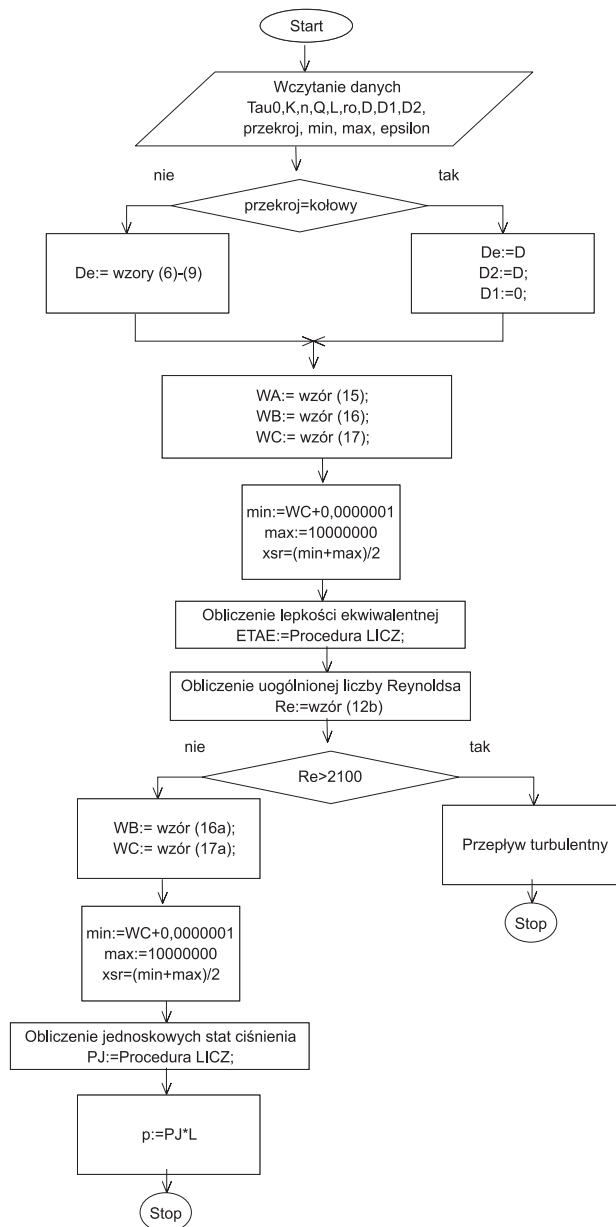
Rozwiązując numerycznie równania (13a) oraz (13b), można wyznaczyć wartość lepkości ekwiwalentnej zaczynu cementowego, opisywanego modelem Herschela–Bulkeleya, w przestrzeni kołowej i pierścieniowej. Następnie wstawiając obliczone wartości do odpowiednio równań (11a) oraz (11b), można wyznaczyć wartość uogólnionej liczby Reynoldsa. Wykorzystując wzór (10), określa się charakter przepływu zaczynu cementowego.

## 6. NUMERYCZNE WYZNACZANIE OPORÓW LAMINARNEGO PRZEPŁYWU ZACZYNU USZCZELNIAJĄCEGO OPISYWANEGO MODELEM CIECZY HERSCHELA–BULKLEYA

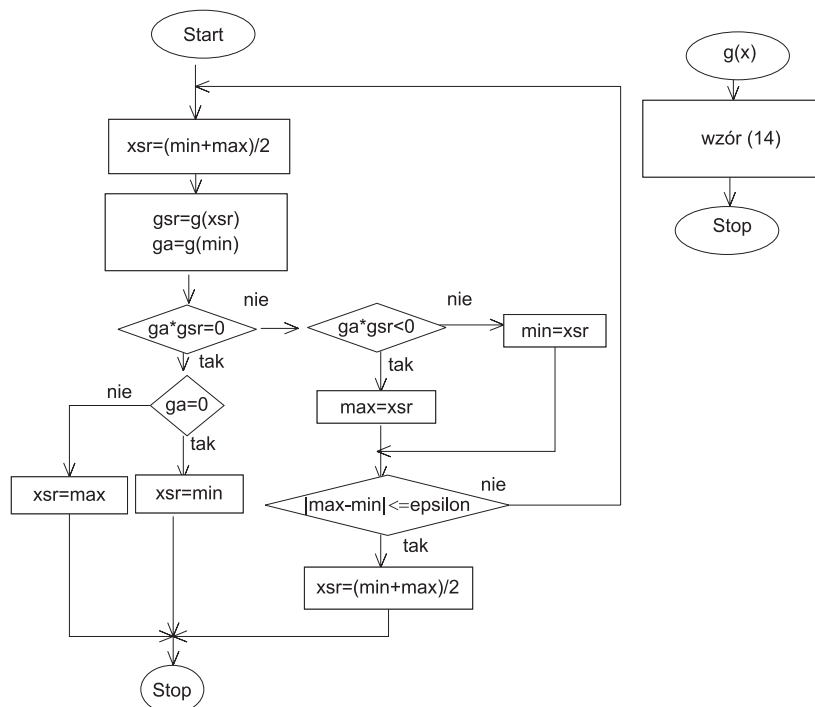
W celu wyznaczenia oporów laminarnego przepływu zaczynu cementowego opisywanego modelem Herschela–Bulkeleya w przestrzeni o przekroju kołowym lub pierścieniowym niezbędne jest rozwiązanie równań (13a), (13b) oraz (4), (5). Wykorzystując ich podobieństwo, można zastosować ogólną funkcję w postaci

$$g(x) = \frac{\pi D_e^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{3n+1}{n}} (n+1)(2n+1)(3n+1)} W_A (W_B x)^{\frac{1}{n}} \left( 1 - \frac{W_C}{x} \right)^{\frac{n+1}{n}} \cdot \left( n(n+1)(2n+1) + 2n^2(n+1) \frac{W_C}{x} + 2n^3 \left( \frac{W_C}{x} \right)^2 \right) - Q \quad (14)$$

a następnie wyznaczyć jej miejsce zerowe. W tym celu proponuje się wykorzystać jedną z metod numerycznych, np. metodę połowienia przedziału [8]. Proponowany algorytm obliczeń przedstawiono na rysunkach 2 i 3.



Rys. 2. Algorytm obliczeń oporów laminarnego przepływu cieczy opisywanej modelem Herschela–Bulkleya



Rys. 3. Wyznaczanie pierwiastka funkcji  $g(x)$  metodą połowienia przedziału. Procedura LICZ

Wartości współczynników  $W_A$ ,  $W_B$ ,  $W_C$  występujących w funkcji (14) wyznaczone są w zależności od poszukiwanej wielkości  $x$ , według wzorów zawartych w tabeli 1.

**Tabela 1**  
Wartości współczynników funkcji  $g(x)$

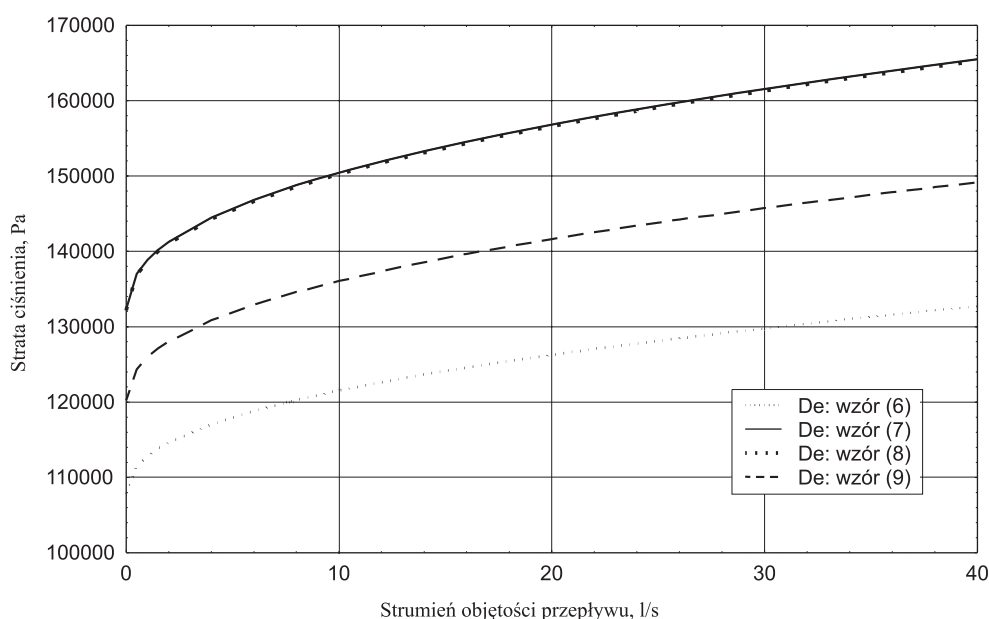
Obliczana numerycznie wielkość	$W_A$	$W_B$	$W_C$
$\eta_e$	$(D_2^2 - D_1^2)$ (15)	$\frac{64Q}{\pi k(D_2^2 - D_1^2)D_e^2}$ (16)	$\frac{\pi \tau_0(D_2^2 - D_1^2)D_e^2}{32Q}$ (17)
$\Delta p/\Delta L$		$\frac{1}{2k}$ (16a)	$\frac{4\tau_0}{D_e}$ (17a)

Wyznaczając szukane wielkości (wielkości  $\eta_e$ ,  $\Delta p/\Delta L$ ) w przestrzeni o przekroju kołowym, należy przyjmować:  $D_e = D_2 = D$  oraz  $D_1 = 0$ . Wykonując obliczenia dla przestrzeni pierścieniowej, w miejsce  $D_e$  należy wstawić jedną z zależności przedstawionych we wzorach (6)–(9).



## 7. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Przyjmując właściwości zaczynu uszczelniającego ( $t_0 = 2,8 \text{ Pa}$ ,  $k = 0,03 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ ,  $n = 0,6$ ,  $\rho = 1730 \text{ kg/m}^3$ ), dokonano przykładowych obliczeń oporów jego przepływu w przestrzeni pierścieniowej o długości  $L = 1000 \text{ m}$ , zawartej pomiędzy ścianą otworu ( $D_2 = 0,4445 \text{ m}$ ) a kolumną rur okładzinowych ( $D_1 = 0,3397 \text{ m}$ ). W celach porównawczych zastosowano różne wzory pozwalające na wyznaczenie średnicy ekwiwalentnej przekroju przepływu. Wyniki obliczeń dla laminarnego zakresu strumienia objętości przepływu  $Q < 0,04 \text{ m}^3/\text{s}$  zestawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Wykres strat ciśnienia laminarnego przepływu cieczy opisywanej modelem Herschela-Bulkleya

## 8. PODSUMOWANIE

Szeroki zakres aplikacji przemysłowej zaczynów cementowych stwarza konieczność odpowiedniego doboru właściwości chemicznych, fizycznych i parametrów reologicznych cieczy. Szczególnie ważny jest dobór modelu reologicznego, opisującego zjawiska fizyczne zachodzące podczas przepływu rzeczywistej mieszaniny cementowej. Spośród znanych modeli na szczególną uwagę zasługuje model cieczy plastycznolepkiej Herschela-Bulkleya.

Przy obliczaniu oporów laminarnego przepływu cieczy opisywanej modelem Herschela-Bulkleya należy wykorzystywać przedstawione w artykule zależności oraz proponowany algorytm obliczeniowy.

Obliczając numerycznie wartości: lepkości ekwiwalentnej, uogólnionej liczby Reynol-  
dsa oraz oporów przepływu w przestrzeni pierścieniowej, należy wykorzystać pojęcie śred-  
nicy ekwiwalentnej przekroju przepływu. Dla wąskich szczelin, występujących np. między  
rurami okładzinowymi a ścianą otworu, należy stosować przedstawione w artykule wzory  
(7) lub (8).

## SPIS OZNACZEŃ

- $D$  – średnica wewnętrzna rury [m]
- $D_1$  – wewnętrzna średnica przestrzeni pierścieniowej [m]
- $D_2$  – zewnętrzna średnica przestrzeni pierścieniowej [m]
- $D_e$  – średnica ekwiwalentna przekroju przepływu [m]
- $dv/dr$  – gradient prędkości ścinania [ $s^{-1}$ ]
- $\Delta p/\Delta L$  – jednostkowe straty ciśnienia [Pa/m]
- $\Delta L$  – długość odcinka rur [m]
- $\eta_e$  – lepkość ekwiwalentna cieczy [Pa·s]
- $k$  – parametr konsystencji [Pa·s]
- $n$  – wykładnik potęgowy [–]
- $L$  – długość elementu, w którym odbywa się przepływ [m]
- $p$  – ciśnienie wywierane na ciecz [Pa]
- $Q$  – strumień objętości przepływu cieczy [ $m^3/s$ ]
- $\rho$  – gęstość cieczy [ $kg/m^3$ ]
- $\tau$  – naprężenia styczne [Pa]
- $\tau_0$  – granica płynięcia [Pa]

## LITERATURA

- [1] Bourgoyne A.T., Milheim K.K., Chenevert M.E., Young F.S.: *Applied Drilling En-  
gineering*. SPE Textbook, 1986
- [2] Kembłowski Z.: *Reometria płynów nienewtonowskich*. Warszawa, WNT 1973
- [3] Klotz J.A., Brigham W.E.: *To determine Herschel–Bulkley coefficients*. Journal of  
Petroleum Technology, Nov. 1998
- [4] Nelson E.B.: *Well Cementing Smith Cementing*. Houston, Schlumberger Edycational  
Services 1990
- [5] Raczkowski J.: *Technologia płuczek wiertniczych*. Katowice, Wydawnictwo Śląsk 1981
- [6] Smith D.K.: *Cementing*. SPE Monograph Series, vol. 4, Richardson 2003
- [7] Stryczek S., Gonet A., Rzychniak M.: *Zadania z płuczek wiertniczych*. Kraków,  
Wyd. AGH 1986
- [8] Wiśniowski R.: *Zastosowanie metod numerycznych przy rozwiązywaniu problemów  
technologicznych*. Materiały Studium Podyplomowego „Transport i dystrybucja gazu”,  
Wydział Wiertnictwa, Nafty i Gazu AGH, Kraków 2003
- [9] Wiśniowski R.: *Zastosowanie modelu Herschela–Bulkleya w hydraulice płuczek  
wiertniczych*. Nowoczesne Techniki i Technologie Bezwykopowe, z. 2, 2000